

Teorema de Stokes

1 Superfícies orientáveis

Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade-2 (superfície). Diz-se que M é *orientável* se existir um campo vectorial contínuo $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\nu(x)$ é um vector unitário e normal a M no ponto x . Também se diz que ν define uma orientação em M .

Exemplo 1.1 Seja M uma variedade-2 dada pelo conjunto de nível zero de uma função $F : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , definida no aberto $S \subset \mathbb{R}^3$. Então, o campo vectorial $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\nu(x, y, z) = \frac{DF(x, y, z)}{|DF(x, y, z)|}$$

é contínuo, unitário e normal a M em cada ponto (x, y, z) , ou seja, M é orientável. Note-se que a derivada $DF(x, y, z)$ tem característica igual a um em M , ou seja $DF(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Exemplo 1.2 Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade-2 dada pelo gráfico de uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$, ou seja

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y) ; (x, y) \in D\}$$

Os vectores

$$t_1 = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) ; \quad t_2 = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

são tangentes a M e, portanto, o campo vectorial definido por

$$\nu(x, y, f(x, y)) = \frac{t_1 \times t_2}{|t_1 \times t_2|} = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{1 + |Df(x, y)|^2}$$

é contínuo, unitário e normal a M em cada um dos seus pontos $(x, y, f(x, y))$. Assim, o gráfico de uma função de classe C^1 é uma superfície orientável.

Exemplo 1.3 Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade-2 dada por uma parametrização $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$, em que $T \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto. Então, o campo vectorial definido por

$$\nu(x, y, z) = \frac{D_1g(t) \times D_2g(t)}{|D_1g(t) \times D_2g(t)|}$$

em que $g(t) = (x, y, z)$, é contínuo, unitário e normal a M no ponto (x, y, z) , ou seja, M é orientável. Note-se que os vectores $D_1g(t)$ e $D_2g(t)$ são linearmente independentes, ou seja o seu produto externo não se anula.

Neste caso, diz-se que a orientação definida por ν é induzida pela parametrização g .

Podemos concluir que uma variedade-2 é localmente orientável. De facto, localmente, uma variedade-2 pode ser descrita como conjunto de nível, como gráfico ou através de uma parametrização.

Exemplo 1.4 O exemplo de uma *superfície não orientável*, a chamada banda ou fita de Möbius, resulta da identificação de duas arestas opostas de um rectângulo, percorridas em sentidos opostos.

Mais precisamente, consideremos o segmento de recta $[AB]$ no plano yz definido por

$$y = 2 ; |z| < 1$$

e a circunferência C de raio igual a dois e com centro na origem.

A banda de Möbius é a superfície que se obtém deslocando o centro do segmento $[AB]$ ao longo da circunferência C e, ao mesmo tempo, fazendo rodar o segmento em torno do seu centro e no plano vertical definido por $[AB]$ e pela origem. Se a deslocação ao longo da circunferência C for dada pelo ângulo θ , a rotação do segmento em torno do seu centro deve ser $\frac{\theta}{2}$. Na figura 1 apresenta-se a banda de Möbius e destaca-se o segmento $[AB]$ na posição inicial ($\theta = 0$) e na posição em que $\theta = \pi$.

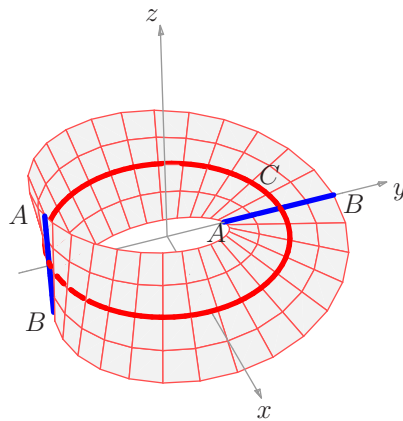


Figura 1: A banda de Möbius

Assim, tendo percorrido a circunferência C , ou seja, para $\theta = 2\pi$, o segmento $[AB]$ encontra-se na posição inicial mas com os extremos invertidos. Portanto, se ν designar a normal unitária no ponto $(0, 2, 0)$ no instante inicial, então, no instante final e no mesmo ponto a normal será $-\nu$, ou seja, a banda de Möbius não é orientável.

2 Fronteira ou bordo de uma superfície

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, limitado e cuja fronteira ∂D é uma linha simples, fechada e seccionalmente de classe C^1 representada parametricamente por $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e percorrida no sentido positivo (contrário ao dos ponteiros do relógio).

Seja $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ a parametrização de uma superfície S .

Chama-se *fronteira ou bordo* da superfície S à linha parametrizada por $g \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, ou seja,

$$\partial S = g(\partial D) = g(\gamma([a, b]))$$

Suponhamos que a orientação de S é a induzida pela parametrização g . Então, diz-se que a orientação ou sentido de percurso da linha ∂S parametrizada por $g \circ \gamma$ é *compatível* com a orientação de S .

Diz-se que um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ pertence ao *interior* de uma superfície M , se existir uma vizinhança de coordenadas V e uma parametrização $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que

$$p \in g(D) = M \cap V$$

Exemplo 2.1 Seja

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 ; x^2 + y^2 < 1\}$$

a porção de plano parametrizada pela função $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(x, y) = (x, y, 0)$$

em que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

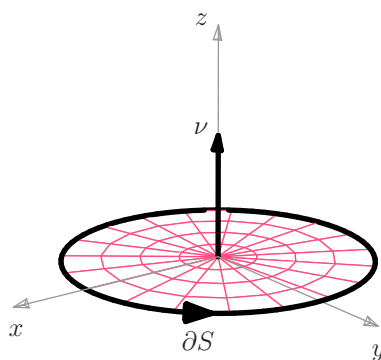


Figura 2

Então a fronteira ou bordo de S é o conjunto

$$\partial S = g(\partial D) = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$$

A orientação de S induzida por g é dada pela normal

$$D_1g(x, y) \times D_2g(x, y) = (0, 0, 1)$$

Seja $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a parametrização que descreve ∂D no sentido positivo e dada por

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

Então, a orientação de ∂S é compatível com a orientação de S , induzida pela parametrização g . De facto,

$$g(\gamma(t)) = (\cos t, \sin t, 0)$$

ou seja, ∂S é percorrido no sentido positivo e a normal a S dirige-se no sentido positivo do eixo z , tal como se mostra na figura 2.

Exemplo 2.2 Consideremos a superfície definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = 1 - x^2 - y^2\}$$

parametrizada pela função $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2),$$

em que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

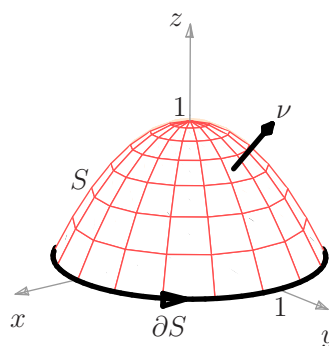


Figura 3

A fronteira ou bordo de S é a circunferência

$$\partial S = g(\partial D) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 ; x^2 + y^2 = 1\}$$

A orientação de S induzida pela parametrização g é dada pelo vector

$$\nu = \frac{D_1g(x, y) \times D_2g(x, y)}{|D_1g(x, y) \times D_2g(x, y)|} = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Assim, se ∂D for percorrida no sentido positivo, então a fronteira ∂S será percorrida no sentido positivo, ou seja, segundo a orientação compatível com a normal ν , tal como se ilustra na figura 3.

De facto, seja $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a parametrização de ∂D definida por

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

Então,

$$g(\gamma(t)) = (\cos t, \sin t, 0),$$

ou seja, ∂S é percorrida no sentido ilustrado na figura 3.

Exemplo 2.3 Consideremos a porção da superfície cilíndrica definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 ; 0 < z < 1\}$$

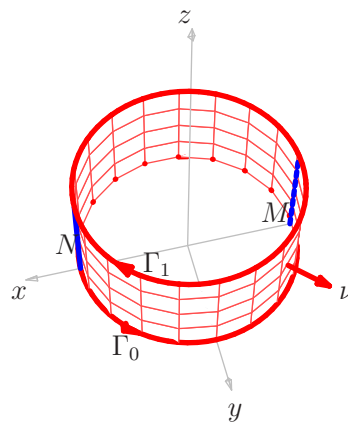


Figura 4

A descrição paramétrica de S é dada, em coordenadas cilíndricas, por duas funções

$$g :]0, 2\pi[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^3 ; h :]-\pi, \pi[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^3$$

definidas por

$$\begin{aligned}g(\theta, z) &= (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, z) \\h(\theta, z) &= (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, z)\end{aligned}$$

A parametrização g descreve $S \setminus N$, em que

$$N = \{(x, y, z) : y = 0 ; x = 1 ; 0 < z < 1\}$$

e h descreve $S \setminus M$, sendo

$$M = \{(x, y, z) : y = 0 ; x = -1 ; 0 < z < 1\}$$

No entanto, temos

$$\begin{aligned}N &= \{h(0, z) : 0 < z < 1\} \\M &= \{g(\pi, z) : 0 < z < 1\},\end{aligned}$$

ou seja, os conjuntos M e N estão no interior de S .

Portanto, a fronteira ou bordo de S é a união das duas circunferências

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \{(x, y, z) : z = 0 ; x^2 + y^2 = 1\} \\ \Gamma_1 &= \{(x, y, z) : z = 1 ; x^2 + y^2 = 1\}\end{aligned}$$

A orientação de S , induzida por g , é traduzida pela normal ν tal que

$$\nu(0, 1, \frac{1}{2}) = (0, 1, 0).$$

De facto,

$$\nu = \frac{D_1 g(\theta, z) \times D_2 g(\theta, z)}{|D_1 g(\theta, z) \times D_2 g(\theta, z)|} = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0).$$

Percorrendo o domínio de g no sentido positivo, então para $z = 0$, temos

$$g(\theta, 0) = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0)$$

e, para $z = 1$,

$$g(\theta, 1) = (\cos(2\pi - \theta), \operatorname{sen}(2\pi - \theta), 1) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1).$$

Portanto, a circunferência Γ_0 deve ser percorrida no sentido positivo e a circunferência Γ_1 deve ser percorrida no sentido negativo, tal como se mostra na figura 4.

A orientação de uma superfície orientável S pode ser estabelecida através da célebre **regra da mão direita**. Fechando a mão direita e com o polegar levantado, a normal ν é dada pelo polegar e o sentido de percurso no bordo ∂S é indicado pelos restantes dedos tal como se representa na figura 5.

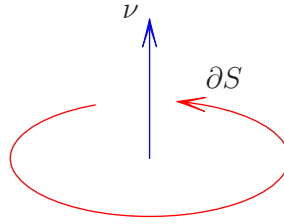


Figura 5

3 Teorema de Stokes

Seja F um campo vectorial de classe C^1 e definido num aberto de \mathbb{R}^3 . Ao campo vectorial definido por

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

chamamos rotacional do campo F .

Na prática, usa-se a seguinte regra mnemónica para definir o rotacional de um campo F :

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right),$$

em que se simula o cálculo do determinante da matriz que apresenta na primeira linha os vectores da base canónica de \mathbb{R}^3 , na segunda linha os símbolos das derivadas parciais em x , y e z e na terceira linha as componentes do campo F .

O teorema de Stokes estabelece que o fluxo do rotacional de um campo vectorial F de classe C^1 através de uma superfície orientável S é igual ao trabalho realizado por F ao longo da fronteira ou bordo de S cuja orientação é compatível com a de S . É usual designar este trabalho por *circulação*. A demonstração do teorema de Stokes numa forma geral pode ser vista em [2, 3, 1].

Teorema 3.1 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade-2 orientável e F um campo vectorial de classe C^1 em \bar{S} . Então,*

$$\int \int_S \text{rot } F \cdot \nu = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

onde γ é um caminho regular simples que representa a linha ∂S cuja orientação é compatível com a de S .

Por ser instrutivo apresentamos a ideia da demonstração do teorema de Stokes para um caso simples em que S é o gráfico de uma função de classe C^2 .

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície descrita pela parametrização $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

em que $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio regular e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 , tal como se representa na figura 6.

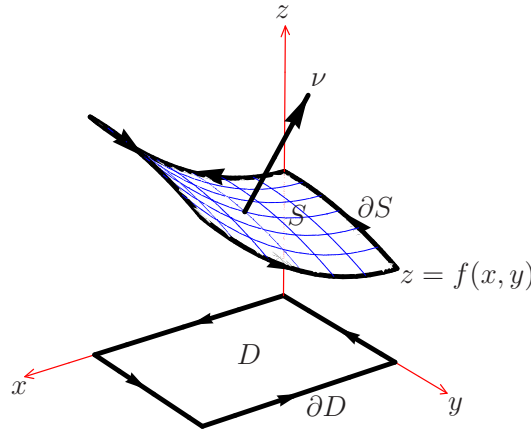


Figura 6: Teorema de Stokes

Neste caso, S é o gráfico de uma função de classe C^2 e, portanto, é uma variedade-2 orientável.

Seja $F = (P, Q, R)$ um campo vectorial de classe C^1 .

Note-se que

$$D_1g \times D_2g = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right).$$

Então, temos

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \nu = \iint_D \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Fazendo,

$$A = P + R \frac{\partial f}{\partial x}; \quad B = Q + R \frac{\partial f}{\partial y},$$

obtemos

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \nu = \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy.$$

Por outro lado, o bordo de S pode ser descrito pelo caminho regular

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$$

em que $(x(t), y(t))$ é o caminho que descreve a fronteira de D tal como se ilustra na figura 6.

Assim,

$$\gamma'(t) = (x'(t), 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t)) + (0, y'(t), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t))$$

e o trabalho de F em ∂S será então dado pelo integral

$$\int_{\partial S} F \cdot d\gamma = \oint_{\partial D} A dx + B dy.$$

Sendo $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular, aplicando o teorema de Green ao campo (A, B) , obtemos

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \nu = \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} A dx + B dy = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma,$$

como pretendido.

Exemplo 3.1 Seja S a superfície definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -1 + y^2 + z^2, x \leq 0\}$$

e consideremos o campo vectorial dado por

$$F(x, y, z) = (xz, ze^x, -y).$$

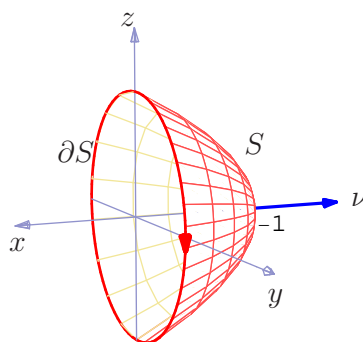


Figura 7

A superfície S é o gráfico da função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 definida por

$$f(y, z) = -1 + y^2 + z^2$$

em que

$$D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 < 1\}.$$

Portanto S é uma superfície orientável e a respectiva fronteira ou bordo é a linha

$$\partial S = \{(x, y, z) : x = 0; y^2 + z^2 = 1\}$$

Podemos usar o teorema de Stokes para calcular o fluxo de $\text{rot } F$ através de S no sentido da normal ν cuja componente segundo x é negativa. Para que a orientação definida por esta normal seja compatível com a de ∂S , esta linha deve ser percorrida no sentido negativo tal como se mostra na figura 7, ou seja, deve ser parametrizada por $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\gamma(t) = (0, \cos t, -\text{sen } t).$$

Então,

$$\int \int_S \text{rot } F \cdot \nu = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (0, -\text{sen } t, -\cos t) \cdot (0, -\text{sen } t, -\cos t) dt = 2\pi.$$

Exemplo 3.2 Consideremos o campo vectorial dado por

$$F(x, y, z) = (y, -x, e^{xz})$$

e a semi-esfera definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; z > 0\}$$

Vamos usar o teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional de F através de S segundo a normal ν tal que $\nu(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$.

A superfície S é orientável por ser o conjunto de nível zero da função $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. A fronteira ou bordo de S é a linha

$$\partial S = \{(x, y, z) : z = 0; x^2 + y^2 = 1\}$$

Para que a orientação de ∂S seja compatível com a de S , induzida por ν , devemos considerar a seguinte parametrização de ∂S

$$\gamma(t) = (\cos t, \text{sen } t, 0) ; 0 \leq t \leq 2\pi$$

que descreve ∂S no sentido positivo tal como se apresenta na figura 8.

Assim, pelo teorema de Stokes, temos

$$\int \int_S \text{rot } F \cdot \nu = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (\text{sen } t, -\cos t, 1) \cdot (-\text{sen } t, \cos t, 0) dt = -2\pi$$

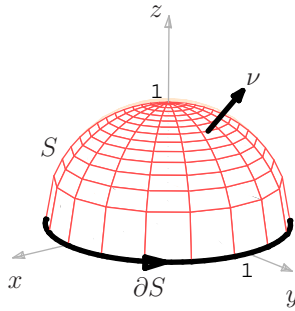


Figura 8

Exemplo 3.3 Consideremos o campo vectorial definido no exemplo anterior e a porção da superfície cilíndrica

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 ; 0 < z < 1\}$$

A superfície S é orientável por ser um conjunto de nível e a fronteira é a união de duas linhas

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{(x, y, z) : z = 0 ; x^2 + y^2 = 1\} \\ \Gamma_1 &= \{(x, y, z) : z = 1 ; x^2 + y^2 = 1\} \end{aligned}$$

Seja ν a normal em S tal que $\nu(0, 1, 1/2) = (0, 1, 0)$. Então, Γ_0 deve ser percorrida no sentido positivo e Γ_1 deve ser percorrida no sentido negativo, tal como se mostra na figura 4. Portanto, as respectivas parametrizações devem ser dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_0(t) &= (\cos t, \sin t, 0) \\ \gamma_1(t) &= (\cos t, -\sin t, 1) \end{aligned}$$

em que $0 \leq t \leq 2\pi$.

Pelo teorema de Stokes, temos

$$\begin{aligned} \int \int_S \text{rot } F \cdot \nu &= \int_{\Gamma_0} F \cdot d\gamma_0 + \int_{\Gamma_1} F \cdot d\gamma_1 \\ &= 2\pi - 2\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

4 Potencial vectorial

O teorema de Stokes pode ser usado para calcular o fluxo de um campo vectorial através de uma superfície.

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável e $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 e definido num aberto $D \subset \mathbb{R}^3$ tal que $S \subset D$. Para usar o teorema de Stokes no cálculo do fluxo de F através de S segundo a normal unitária ν , deverá existir um campo vectorial $A : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$F = \text{rot } A.$$

O campo A designa-se por **potencial vectorial** de F .

Se tal campo vectorial existir, teremos

$$\int_S F \cdot \nu = \int_S \text{rot } A \cdot \nu = \int_{\partial S} A \cdot d\gamma$$

em que γ é um caminho que descreve o bordo ∂S e compatível com a orientação de S .

É fácil concluir que, dado um campo vectorial A , se tem

$$\text{div}(\text{rot } A) = 0.$$

Portanto, dado um campo vectorial F , a condição $\text{div } F = 0$ é necessária para que exista o respectivo potencial vectorial A .

Assim, para usar o teorema de Stokes no cálculo do fluxo de um campo vectorial F através de uma superfície S , deveremos ter $\text{div } F = 0$.

Exemplo 4.1 Seja $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido por

$$F(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; z < h < 1\},$$

em que $h > 0$ tal como se representa na figura 9.

Note-se que $\text{div } F = 0$ e que S é a superfície esférica da qual se retirou a calote esférica correspondente a $z > h$.

Seja A o potencial vectorial de F definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Pelo teorema de Stokes, temos

$$\int_S F \cdot \nu = \int_S \text{rot } A \cdot \nu = \int_{\partial S} A \cdot d\gamma$$

em que γ é um caminho que descreve o bordo ∂S , compatível com a orientação de S .

É claro que

$$\int_S F \cdot \nu = \int_S \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot (x, y, z) = \text{vol}_2(S),$$

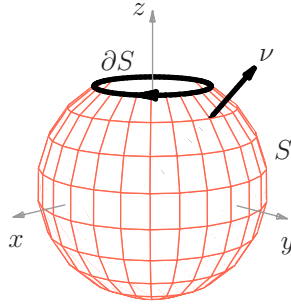


Figura 9

em que $\text{vol}_2(S)$ é a área de S .

Por outro lado,

$$\left| \int_{\partial S} A \cdot d\gamma \right| \leq M l(\partial S)$$

em que $l(\partial S)$ é o comprimento de ∂S e $M = \max_{\partial S} \|A\|$. Note-se que este máximo existe porque ∂S é um conjunto compacto.

Fazendo $h \rightarrow 1$ obtemos o absurdo

$$4\pi = \lim_{h \rightarrow 1} \int_S F \cdot \nu = \lim_{h \rightarrow 1} \int_{\partial S} A \cdot d\gamma = 0$$

e, portanto, concluímos que, apesar de termos $\text{div } F = 0$, não existe potencial vectorial para o campo F .

Note-se que $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ não é um conjunto em estrela.

Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um aberto, em estrela relativamente à origem, e seja $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 tal que $\text{div } F = 0$.

Consideremos o campo vectorial $A : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$A(x, y, z) = \int_0^1 F(tx, ty, tz) \times (tx, ty, tz) dt,$$

ou seja, obtido por integração do produto externo $F(x, y, z) \times (x, y, z)$ ao longo do segmento de recta entre a origem e o ponto $(x, y, z) \in D$.

Seja $A = (A_1, A_2, A_3)$, então

$$\begin{aligned} A_1(x, y, z) &= \int_0^1 t [zF_2(tx, ty, tz) - yF_3(tx, ty, tz)] dt \\ A_2(x, y, z) &= \int_0^1 t [xF_3(tx, ty, tz) - zF_1(tx, ty, tz)] dt \\ A_3(x, y, z) &= \int_0^1 t [yF_1(tx, ty, tz) - xF_2(tx, ty, tz)] dt. \end{aligned}$$

Usando a **Regra de Leibniz** e sabendo que $\operatorname{div} F = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} &= \int_0^1 \left(2tF_1 + xt^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} + yt^2 \frac{\partial F_1}{\partial y} + zt^2 \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} t^2 F_1(tx, ty, tz) dt \\ &= F_1(x, y, z).\end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} &= F_2(x, y, z) \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} &= F_3(x, y, z),\end{aligned}$$

ou seja, $F = \operatorname{rot} A$ e, portanto, o campo A é o potencial vectorial de F em D .

Teorema 4.1 *Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um aberto em estrela e $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 tal que*

$$\operatorname{div} F = 0.$$

Então, existe potencial vectorial de F , ou seja, existe um campo $A : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$F = \operatorname{rot} A.$$

Note-se que, dado um campo escalar $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , é claro que

$$\operatorname{rot}(\nabla\phi) = 0,$$

ou seja, um campo gradiente é fechado. Portanto, se A for um potencial vectorial de F , então o campo $A + \nabla\phi$ será também um potencial vectorial de F .

Diz-se que um campo vectorial é **irrotacional** se o respectivo rotacional for nulo.

Exemplo 4.2 Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = x^2, 1 < x < 2\},$$

e o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x, y, z) = (2x, -y, -z).$$

Facilmente se verifica que $\text{div } F = 0$. Estando F definido em \mathbb{R}^3 , que é um conjunto em estrela, existe potencial vectorial de F e podemos usar o teorema de Stokes para calcular o fluxo de F através de S segundo a direcção da normal ν . Suponhamos que a normal ν tem primeira componente negativa.

Um potencial vectorial de F será dado por

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &= \int_0^1 F(tx, ty, tz) \times (tx, ty, tz) dt \\ &= \int_0^1 t(2tx, -ty, -tz) \times (x, y, z) dt \\ &= \int_0^1 (0, -3txz, 3txy) dt \\ &= (0, -xz, xy) \end{aligned}$$

Outra forma para determinar um potencial vectorial A será a de resolver o sistema

$$\begin{aligned} \text{rot } A = F &\iff \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = (2x, -y, -z) \\ &\iff \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 2x \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = -y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -z \end{cases} \end{aligned}$$

Fazendo, por exemplo, $A_1 = 0$ obtemos,

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 2x \\ -\frac{\partial A_3}{\partial x} = -y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} = -z \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 2x \\ A_3(x, y, z) = yx + C_3(y, z) \\ A_2(x, y, z) = -zx + C_2(y, z) \end{cases}$$

Substituindo na primeira equação, obtemos

$$x + \frac{\partial C_3}{\partial y}(y, z) + x - \frac{\partial C_2}{\partial z}(y, z) = 2x$$

pelo que podemos fazer $C_2(y, z) = C_3(y, z) = 0$. Conclui-se que um potencial vectorial para F é dado por

$$A(x, y, z) = (0, -zx, yx).$$

Pelo teorema de Stokes,

$$\int_S F \cdot n \, dS = \int_S \text{rot } A \cdot n \, dS = \oint_{\partial S} A \cdot d\gamma.$$

O bordo de S é constituído por duas linhas:

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1, x = 1\}$$

e

$$\Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 4, x = 2\}.$$

Para que as respectivas orientações sejam compatíveis com a normal ν , então Γ_1 deve ser percorrida no sentido positivo e Γ_2 no sentido negativo tal como se ilustra na figura 10.

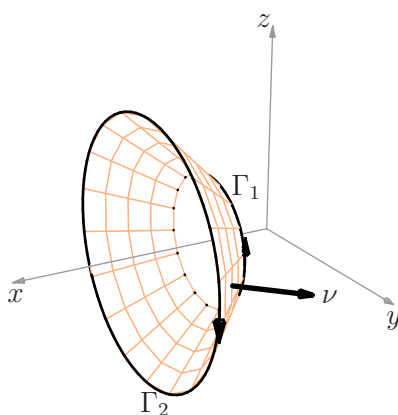


Figura 10

Γ_1 pode ser descrita pelo caminho

$$\gamma_1(t) = (1, \cos t, \sin t), \quad 0 < t < 2\pi$$

e Γ_2 por

$$\gamma_2(t) = (2, 2 \cos t, -2 \sin t), \quad 0 < t < 2\pi.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot n \, dS &= \oint_{\Gamma_1} A \cdot d\gamma_1 + \oint_{\Gamma_2} A \cdot d\gamma_2 \\ &= \int_0^{2\pi} (0, -\sin t, \cos t) \cdot (0, -\sin t, \cos t) \, dt + \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (0, 4 \sin t, 4 \cos t) \cdot (0, -2 \sin t, -2 \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt - \int_0^{2\pi} 8 \, dt = -14\pi. \end{aligned}$$

Exemplo 4.3 Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o campo definido por

$$F(x, y, z) = (0, x, 0)$$

e a superfície

$$S = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 : x = 1 - y^2 - z^2; z > 0; x > 0\}.$$

Dado que $\operatorname{div} F = 0$ e \mathbb{R}^3 é um conjunto em estrela, o campo F admite potencial vectorial A e podemos usar o teorema de Stokes para calcular o fluxo de F através de S .

O potencial vectorial A pode ser determinado resolvendo a equação $\operatorname{rot} A = F$ ou calculando o integral seguinte

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &= \int_0^1 F(tx, ty, tz) \times (tx, ty, tz) dt \\ &= \int_0^1 (0, tx, 0) \times (tx, ty, tz) dt \\ &= \int_0^1 (t^2xz, 0, -t^2x^2) dt \\ &= \left(\frac{1}{3}xz, 0, -\frac{1}{3}x^2 \right). \end{aligned}$$

Consideremos a normal ν sobre S com primeira componente positiva. Pelo teorema de Stokes, o fluxo de F através de S segundo a normal ν será dado por

$$\int_S F \cdot \nu = \int_S \operatorname{rot} A \cdot \nu = \int_{\partial S} A \cdot d\gamma,$$

em que γ é um caminho que descreve o bordo ∂S e compatível com a orientação de S .

O bordo de S é constituído por duas linhas

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 : x = 1 - y^2; z = 0; x > 0\}$$

e

$$\Gamma_2 = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1; z > 0; x = 0\},$$

cujas orientações, compatíveis com a normal ν , se ilustram na figura 11.

Assim, a linha Γ_1 pode ser descrita pelo caminho $\gamma_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por

$$\gamma_1(y) = (1 - y^2, y, 0),$$

e a linha Γ_2 pelo caminho $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, dado por

$$\gamma_2(\theta) = (0, \cos \theta, \sin \theta).$$

Portanto, teremos

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot \nu &= \int_{\partial S} A \cdot d\gamma \\ &= \int_{\Gamma_1} A \cdot d\gamma_1 + \int_{\Gamma_2} A \cdot d\gamma_2 \\ &= \int_{-1}^1 \left(0, 0, -\frac{(1 - y^2)^2}{3} \right) \cdot (-2y, 1, 0) dy + \int_0^\pi (0, 0, 0) \cdot (0, -\sin \theta, \cos \theta) d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

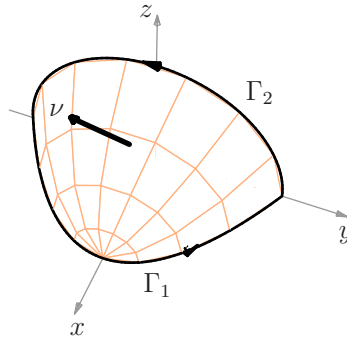


Figura 11

Exemplo 4.4 Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o campo definido por

$$F(x, y, z) = (2xz, -xy, xz - z^2)$$

e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2; z < 1\},$$

cuja normal ν tem terceira componente negativa.

Dado que $\operatorname{div} F = 0$ e sendo \mathbb{R}^3 um conjunto em estrela, F admite um potencial vectorial A que pode ser determinado resolvendo a equação $\operatorname{rot} A = F$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} &= 2xz \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} &= -xy \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} &= xz - z^2. \end{aligned}$$

Fazendo $A_3 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{\partial A_2}{\partial z} &= 2xz \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} &= -xy \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} &= xz - z^2. \end{aligned}$$

Das primeiras duas equações vem

$$\begin{aligned} A_1(x, y, z) &= -xyz \\ A_2(x, y, z) &= -xz^2 + K(x, y) \end{aligned}$$

em que K é uma função que não depende de z . Da terceira equação obtemos

$$\frac{\partial K}{\partial y} = 0$$

e, portanto, podemos considerar para potencial vectorial de F o campo

$$A(x, y, z) = (-xyz, -xz^2, 0).$$

Usando o teorema de Stokes, temos

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot \nu &= \int_S \operatorname{rot} A \cdot \nu \\ &= \int_{\partial S} A \cdot d\gamma \end{aligned}$$

em que γ é um caminho que descreve o bordo ∂S de forma compatível com a normal ν .

O bordo de S é a circunferência

$$\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 ; z = 1\}$$

e pode ser descrita pelo caminho $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\gamma(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1)$$

que é compatível com a normal ν , tal como se ilustra na figura 12.

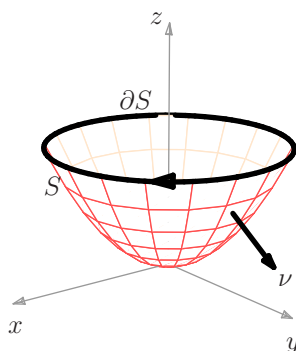


Figura 12

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot \nu &= \int_{\partial S} A \cdot d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t \operatorname{sen} t, -\cos t, 0) \cdot (-\operatorname{sen} t, -\cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} [-\operatorname{sen}^2 t \cos t + \cos^2 t] dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Referências

- [1] F. R. Dias Agudo. *Cálculo Integral em R^n* . Escolar Editora, 1973.
- [2] Luís T. Magalhães. *Integrais em Variedades e Aplicações*. Texto Editora, 1993.
- [3] J. E. Marsden and A. J. Tromba. *Vector Calculus*. W. H. Freeman and Company, 1998.