

## CDI-II

### Trabalho. Teorema Fundamental do Cálculo

#### 1 Trabalho. Potencial Escalar

Uma das noções mais importantes na Física é a de trabalho realizado por uma força ao longo de uma trajetória de uma partícula com massa que se traduz na variação da respectiva energia cinética. Matematicamente, uma força é um campo vectorial e o trabalho define-se como sendo o integral de linha desse campo vectorial.

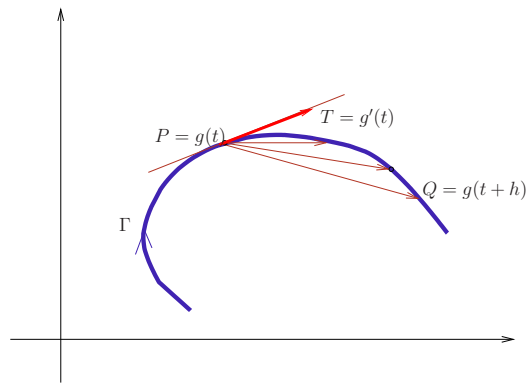


Figura 1: Tangente a uma linha

**Definição 1.1** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vectorial e consideremos uma linha  $\Gamma \subset S$  representada pelo caminho  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  (caminho regular).*

*Ao integral*

$$\int_{\Gamma} F \cdot dg = \int_a^b F(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

*chamamos integral de linha do campo vectorial  $F$  ao longo do caminho  $g$  ou, trabalho realizado pelo campo  $F$  ao longo do caminho  $g$  (c.f. [3, 4, 1]).*

Sendo  $g$  de classe  $C^1$ , consideremos a sua derivada

$$g'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}.$$

Tal como se ilustra na Figura 1, a derivada  $g'(t)$  define a direcção da tangente à linha  $\Gamma$  no ponto  $P = g(t)$ . Note-se que à medida que  $h \rightarrow 0$  a secante  $[P, Q]$  vai-se transformando na tangente.

Portanto, se o campo vectorial  $F$  for, em cada ponto  $P = g(t) \in \Gamma$ , ortogonal ao vector tangente  $g'(t)$  nesse ponto, então o trabalho realizado pelo campo  $F$  ao longo do caminho  $g$  será nulo.

**Teorema 1.1 Teorema Fundamental do Cálculo:** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$  um campo escalar de classe  $C^1$  e  $\Gamma \subset S$  a linha definida pelo caminho regular  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  com início no ponto  $A$  e fim no ponto  $B$ .*

*Então,*

$$\int_{\Gamma} \nabla \phi \cdot dg = \phi(B) - \phi(A).$$

De facto, sendo  $A = g(a)$  e  $B = g(b)$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \nabla \phi \cdot dg &= \int_a^b \nabla \phi(g(t)) \cdot g'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(g(t)) dt \\ &= \phi(g(b)) - \phi(g(a)) \\ &= \phi(B) - \phi(A). \end{aligned}$$

**Definição 1.2** *Dado um campo vectorial  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  se existir um campo escalar  $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$F(x) = \nabla \phi(x)$$

*dizemos que  $F$  é um campo **gradiente** e que  $\phi$  é o **potencial escalar** de  $F$ .*

### Consequências:

- O integral de linha de um campo gradiente não depende do caminho. Depende apenas do ponto inicial  $A$  e do ponto final  $B$ .
- Se a linha  $\Gamma$  for fechada, ou seja, se  $A = g(a) = g(b) = B$  e se  $F = \nabla \phi$ , então

$$\int_{\Gamma} F \cdot dg = \int_{\Gamma} \nabla \phi \cdot dg = 0$$

Seja  $F$  um campo gradiente e de classe  $C^1$ . Então, existe um campo escalar  $\phi$  tal que

$$F_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

e, derivando em ordem a  $x_j$ , obtemos

$$D_j F_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = D_i F_j; \quad \forall i \neq j$$

**Definição 1.3** Dado um campo vectorial  $F$  tal que

$$D_j F_i = D_i F_j; \quad \forall i \neq j$$

diz-se que  $F$  é um campo **fechado**.

Assim, ser fechado é condição necessária para que um campo vectorial seja gradiente.

\*\*\*

**Nota 1.1** Dado um campo vectorial  $F$  o cálculo do respectivo trabalho é bastante simples se for um campo gradiente e o respectivo potencial escalar  $\phi$  seja conhecido.

No caso em que o caminho é fechado o trabalho será nulo e não é necessário conhecer o potencial escalar explicitamente.

Se o caminho não for fechado, então deveremos ter uma forma de calcular explicitamente o potencial escalar.

Em alguns casos esse cálculo é simples. Em geral, recorreremos a primitivações sucessivas como veremos nos exemplos. Note-se que temos

$$F = \nabla \phi,$$

ou seja,

$$F_k = \frac{\partial \phi}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

e, portanto, de uma destas equações, por primitivação na variável  $x_k$ , obtemos uma função candidata a potencial escalar.

Esta função envolve uma constante relativamente à variável  $x_k$  que pode depender das restantes variáveis. Usando sistematicamente as restantes equações obtemos uma forma explícita para o potencial escalar.

\*\*\*

**Exemplo 1.1 Campo gravitacional:**

Seja  $M$  uma massa pontual e situada na origem de  $\mathbb{R}^3$ . O campo gravitacional gerado pela massa  $M$  é dado por

$$F(x, y, z) = -GM \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|^3} = -GM \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

em que  $\vec{r} = (x, y, z)$  e  $G$  é a constante universal da gravitação.

Facilmente se verifica que o campo gravitacional é um gradiente e o seu potencial é a função

$$\phi(x, y, z) = GM \frac{1}{\|(x, y, z)\|} = GM \frac{1}{\|\vec{r}\|} = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ou seja

$$F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

Note-se que o domínio do campo  $F$  coincide com o domínio do respectivo potencial  $\phi$ , ou seja,  $F = \nabla \phi$  em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ .

**Exemplo 1.2** Seja  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  o campo vectorial definido por

$$F(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

Facilmente se verifica que  $F$  é um campo fechado e que

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \nabla \log(x^2 + y^2)$$

ou seja,  $F$  é um campo gradiente e o respectivo potencial é o campo escalar  $\phi$  definido por  $\phi(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Tanto  $F$  como  $\phi$  estão definidos no mesmo domínio,  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

**Exemplo 1.3** Consideremos o campo vectorial  $F(x, y) = (x, y)$  definido em  $\mathbb{R}^2$ . Trata-se de um campo fechado porque se tem

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$$

e, portanto, há a possibilidade de que seja um gradiente. Para determinar o respectivo potencial escalar consideremos as equações

$$\begin{cases} x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases}.$$

Da primeira equação, primitivando na variável  $x$ , obtemos

$$\phi(x, y) = \frac{x^2}{2} + K(y)$$

em que  $K(y)$  é uma constante relativamente a  $x$ , (não depende  $x$  mas pode depender de  $y$ ).

Esta função  $\phi(x, y)$  passa a ser a candidata a potencial escalar de  $F$ . Substituindo na segunda equação, vem

$$y = K'(y)$$

e, primitivando em  $y$ , obtemos

$$K(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

em que  $C$  é uma constante.

Assim, o potencial escalar do campo  $F$  é dado por

$$\phi(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + C$$

**Exemplo 1.4** Consideremos o campo vectorial  $F(x, y, z) = (y, x + ze^{yz}, ye^{yz})$ .

Facilmente se verifica que  $F$  é um campo fechado e, portanto, o respectivo potencial escalar  $\phi$  será calculado da equação  $F = \nabla\phi$ , ou seja

$$\begin{cases} y & = \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ x + ze^{yz} & = \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ ye^{yz} & = \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{cases} .$$

Da primeira equação e primitivando em  $x$ , obtemos

$$\phi(x, y, z) = xy + A(y, z)$$

em que  $A(y, z)$  é uma constante relativamente a  $x$  mas que pode depender de  $y$  e de  $z$ .

Substituindo na segunda equação, obtemos

$$x + ze^{yz} = x + \frac{\partial A}{\partial y},$$

ou seja,

$$\frac{\partial A}{\partial y} = ze^{yz}.$$

Primitivando em  $y$ , vem

$$A(y, z) = e^{yz} + B(z)$$

em que  $B(z)$  é uma constante relativamente a  $y$  mas que pode depender de  $z$ .

Assim, a função  $\phi$  passa a ser dada por

$$\phi(x, y, z) = xy + e^{yz} + B(z).$$

Substituindo na terceira equação, teremos

$$ye^{yz} = ye^{yz} + B'(z),$$

ou seja,

$$B'(z) = 0 \Leftrightarrow B(z) = C$$

em que  $C$  é uma constante.

Portanto, o potencial escalar de  $F$  será dado por

$$\phi(x, y, z) = xy + e^{yz} + C$$

**Exemplo 1.5** Consideremos o campo vectorial  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por

$$F(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Facilmente se verifica que  $F$  é um campo fechado. Note-se que para  $x \neq 0$ , temos

$$-\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{y}{x}\right); \quad \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

No entanto, o campo escalar  $\phi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  está definido no subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  em que  $x \neq 0$  e, portanto, não coincide com o domínio do campo vectorial  $F$  que é o conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Assim, a função  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  não é um potencial escalar do campo  $F$ .

Seja  $\Gamma$  uma circunferência de raio  $R$  e centro na origem e descrita pelo caminho  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por

$$g(t) = (R \cos t, R \sin t).$$

Então

$$\int_{\Gamma} F \cdot dg = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{R \sin t}{R^2}, \frac{R \cos t}{R^2} \right) \cdot (-R \sin t, R \cos t) dt = 2\pi$$

Sendo  $g$  um caminho fechado, concluímos que o campo  $F$  não é um campo gradiente em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Se considerarmos o campo  $F$  como estando definido apenas no aberto  $\{(x, y) : x > 0\}$ , então  $F$  é um gradiente cujo potencial é a função

$$\phi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

O mesmo se passará para o conjunto  $\{(x, y) : x < 0\}$  ou seja, há subconjuntos de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  em que  $F$  é um campo gradiente.

Note-se que o conjunto  $S = \{(x, y) : x > 0\}$  é convexo, ou seja, dados dois pontos quaisquer  $P$  e  $Q$  em  $S$ , o segmento de recta  $[P, Q]$  está contido em  $S$ . No entanto, o conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  não é convexo.

Note-se também que o integral de linha de  $F$  ao longo de uma circunferência centrada na origem não depende do raio.

\*\*\*

Do exemplo 1.5 surgem duas questões importantes:

- Será possível caracterizar os subconjuntos de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  em que  $F$  é um campo gradiente?
- Será que o integral de linha de  $F$  ao longo de uma linha qualquer fechada em torno da origem é igual ao integral de linha de  $F$  ao longo de uma circunferência centrada na origem?

A resposta a estas questões recorre ao conceito de homotopia. No entanto uma resposta simples e bastante importante será dada pelo teorema de Green em  $\mathbb{R}^2$  e pelo teorema de Stokes em  $\mathbb{R}^3$ .

\*\*\*

Seja  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vectorial fechado em que  $S \subset \mathbb{R}^n$  é uma bola aberta centrada num ponto  $P$ .

Consideremos a função  $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\phi(x) = \int_{[P,x]} F \cdot dg$$

em que  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é o caminho dado por

$$g(t) = (1 - t)P + tx$$

e que descreve o segmento de recta  $[P, x]$ .

Assim, teremos

$$\phi(x) = \int_0^1 F((1 - t)P + tx) \cdot (x - P) dt$$

donde se deduz, usando a regra de Leibniz, que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^n [t D_i F_j((1 - t)P + tx)(x_j - P_j)] + F_i((1 - t)P + tx) \right) dt.$$

Sendo  $F$  um campo fechado, obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_0^1 \frac{d}{dt} (tF_i((1-t)P + tx)) dt = F_i(x)$$

o que quer dizer que

$$F = \nabla \phi.$$

Portanto, o campo  $F$  é gradiente e o respectivo potencial escalar é a função  $\phi$  definida pelo trabalho realizado por  $F$  ao longo do segmento de recta  $[P, x]$ .

É claro que se  $S$  for um conjunto em que exista um ponto  $P$  tal que o segmento de recta  $[P, x]$  esteja contido em  $S$  para qualquer ponto  $x \in S$ , então o campo  $F$  será gradiente.

Note-se que o conjunto  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$  verifica esta propriedade por ser convexo. No exemplo 1.5 vimos que o campo

$$F(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

é gradiente neste conjunto.

É também claro que se  $S$  for um conjunto aberto e  $P \in S$  um ponto qualquer então existe uma bola centrada em  $P$  e contida em  $S$  e, portanto, o campo vectorial  $F$  será gradiente nessa bola.

Assim, dizemos que um campo vectorial fechado  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definido num aberto  $S$ , é localmente um gradiente, ou seja, em torno de um dado ponto de  $S$  existe uma vizinhança em que  $F$  tem um potencial escalar.

Podemos concluir que em certos conjuntos é possível definir o potencial escalar de um campo vectorial fechado através do trabalho realizado em segmentos de recta.

Veremos, recorrendo ao conceito de homotopia, que há uma classe mais geral de conjuntos em que um campo fechado é um gradiente. Esta abordagem tem a vantagem de evitar o cálculo explícito do potencial escalar tendo apenas em conta as propriedades geométricas do domínio do campo vectorial dado.

\*\*\*

## 2 Campos Vectoriais Fechados. Homotopia

Como vimos no exemplo 1.5, o campo vectorial  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por

$$F(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

é fechado, ou seja,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

No entanto o respectivo integral de linha ao longo de uma circunferência  $C_R$ , centrada na origem e raio  $R$ , não é nulo. De facto, temos

$$\int_{C_R} F \cdot d\gamma = 2\pi,$$

desde que  $C_R$  seja percorrida uma vez no sentido directo.

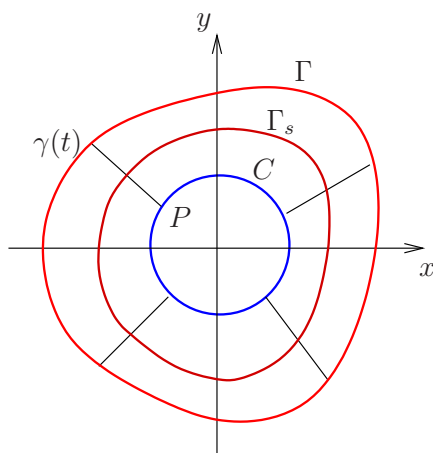


Figura 2: Deformação de  $\Gamma$  em  $C$

Portanto, ser fechado é uma condição necessária para que um campo vectorial seja gradiente mas não é condição suficiente (c.f. [2, 3, 4, 1]).

Note-se que o integral de linha de  $F$  não depende do raio da circunferência. Seja  $\Gamma$  uma linha fechada uma vez em torno da origem. Será que temos

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{C_R} F \cdot d\gamma = 2\pi?$$

Por outro lado, sabemos que no conjunto  $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$  o campo  $F$  tem um potencial escalar  $\phi(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$ .

Portanto, o integral de linha de  $F$  ao longo de uma linha fechada  $\Gamma \subset S$  será nulo.

Seja  $\Gamma$  uma linha fechada mas que não se fecha em torno da origem. Será que temos

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = 0?$$

Se as respostas a estas questões forem positivas, bastará considerar a circunferência centrada na origem e de raio igual a um para termos o valor do integral de linha de  $F$  ao longo de qualquer linha fechada em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Seja  $\Gamma$  uma linha fechada em torno da origem e descrita pelo caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  e consideremos a função  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$H(s, t) = s \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} + (1-s)\gamma(t).$$

Note-se que a função  $\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$  descreve a circunferência  $C$  de raio igual a um e centro na origem.

Por outro lado, temos

$$H(0, t) = \gamma(t) ; \quad H(1, t) = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}.$$

Para cada  $s \in [0, 1]$ , a função  $g_s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$g_s(t) = H(s, t)$$

descreve uma linha  $\Gamma_s$  tal como se representa na figura 2.

Fixando  $t \in [0, 1]$ , a aplicação  $s \mapsto H(s, t)$  é um caminho que descreve o segmento de recta  $[P, \gamma(t)]$ , em que  $P = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} \in C$ , tal como se ilustra na figura 2.

Portanto, a função  $H$  descreve uma família de linhas que para  $s = 0$  é a linha  $\Gamma$  e para  $s = 1$  é a circunferência  $C$ , ou seja,  $H$  descreve uma transformação contínua (ou deformação) da linha  $\Gamma$  na circunferência  $C$ , tal como se ilustra na Figura 2.

Estas observações motivam a seguinte definição de linhas homotópicas em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.1** Diz-se que dois caminhos fechados  $\alpha, \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  são **homotópicos** se existe uma função contínua  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  com as seguintes propriedades:

1.  $H(0, t) = \alpha(t) ; \quad t \in [0, 1]$
2.  $H(1, t) = \gamma(t) ; \quad t \in [0, 1]$
3.  $H(s, 0) = H(s, 1) ; \quad s \in [0, 1]$ .

Suponhamos que a função  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que estabelece a homotopia entre dois caminhos fechados é de classe  $C^2$ .

Seja  $\Gamma_s$  a linha descrita pelo caminho  $g_s(t) = H(s, t)$ . Então, usando a regra de Leibniz, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{\Gamma_s} F &= \frac{d}{ds} \int_0^1 F(g_s(t)) \cdot g'_s(t) dt = \frac{d}{ds} \int_0^1 F(H(s, t)) \cdot \frac{\partial H}{\partial t}(s, t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \left( \sum_{k=1}^n F_k(H(s, t)) \frac{\partial H_k}{\partial t}(s, t) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(H(s, t)) \frac{\partial H_j}{\partial s}(s, t) \frac{\partial H_k}{\partial t}(s, t) + \sum_{k=1}^n F_k(H(s, t)) \frac{\partial^2 H_k}{\partial s \partial t}(s, t) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(H(s, t)) \frac{\partial H_j}{\partial s}(s, t) \frac{\partial H_k}{\partial t}(s, t) + \sum_{k=1}^n F_k(H(s, t)) \frac{\partial^2 H_k}{\partial s \partial t}(s, t) \right) dt \end{aligned}$$

porque  $F$  é fechado.

É fácil verificar que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n F_j(H(s, t)) \frac{\partial H_j}{\partial s}(s, t) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(H(s, t)) \frac{\partial H_j}{\partial s}(s, t) \frac{\partial H_k}{\partial t}(s, t) + \\ &+ \sum_{k=1}^n F_k(H(s, t)) \frac{\partial^2 H_k}{\partial s \partial t}(s, t) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{\Gamma_s} F &= \int_0^1 \left( \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n F_j(H(s, t)) \frac{\partial H_j}{\partial s}(s, t) \right) dt \\ &= \sum_{j=1}^n F_j(H(s, 1)) \frac{\partial H_j}{\partial s}(s, 1) - \sum_{j=1}^n F_j(H(s, 0)) \frac{\partial H_j}{\partial s}(s, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

porque  $H(s, 0) = H(s, 1)$ .

Assim, a função  $\int_{\Gamma_s} F$  não depende de  $s$ , ou seja, podemos concluir que o integral de linha de um campo vectorial fechado é invariante para caminhos homotópicos. Dito de outro modo, o trabalho realizado por um campo fechado tem o mesmo valor em linhas fechadas homotópicas.

Em particular, o integral de linha de um campo vectorial fechado é nulo ao longo de um caminho fechado e homotópico a um caminho constante. Note-se que a imagem de um caminho constante é um ponto e, portanto o trabalho realizado pelo campo nesse caminho é nulo.

Portanto, dado um campo vectorial fechado, é importante saber se no respectivo domínio as linhas fechadas são homotópicas a um ponto.

**Definição 2.2** Diz-se que um conjunto aberto  $S \subset \mathbb{R}^n$  é **simplesmente conexo** se qualquer linha fechada  $\Gamma \subset S$  pode ser transformada continuamente num ponto  $P \in S$ , ou seja, se existe uma função  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua, com as seguintes propriedades,

1.  $H(0, t) = P; \quad t \in [0, 1]$
2.  $H(1, t) = \gamma(t); \quad t \in [0, 1]$
3.  $H(s, 0) = H(s, 1); \quad s \in [0, 1],$

em que  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um caminho que descreve a linha  $\Gamma$ . Nestas circunstâncias, diz-se que a linha  $\Gamma$  é homotópica a um ponto.

\*\*\*

Assim, num conjunto simplesmente conexo o integral de linha de um campo vectorial fechado ao longo de uma linha fechada é nulo.

**Exemplo 2.1** Qualquer conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  convexo é simplesmente conexo.  $S$  é convexo se, dados dois pontos  $P \in S$  e  $Q \in S$ , então o segmento de recta  $[P, Q]$  está contido em  $S$ .

Consideremos a função  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$H(s, t) = P + s(\alpha(t) - P).$$

Esta função estabelece a homotopia (deformação contínua) entre uma linha qualquer fechada  $\Gamma \subset S$ , descrita pelo caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e um ponto qualquer  $P$  fixo em  $S$ , tal como se ilustra na figura 3.

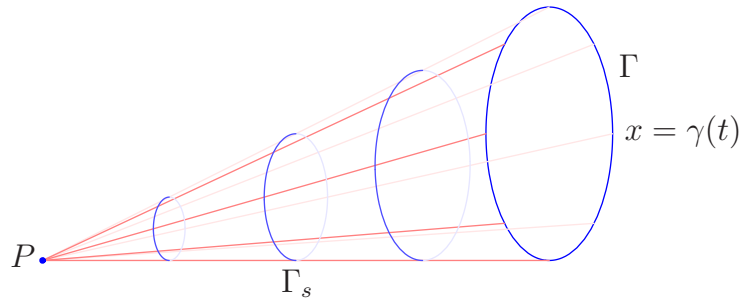


Figura 3: Homotopia ou deformação de uma linha fechada num ponto

**Exemplo 2.2** Qualquer conjunto em estrela é simplesmente conexo. Um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  diz-se em estrela, ou que é uma estrela, se existir um ponto  $P \in S$  tal que o segmento de recta  $[P, Q]$  se encontra em  $S$  para qualquer ponto  $Q \in S$ .

A homotopia pode ser definida do mesmo modo do exemplo anterior.

Note-se que qualquer conjunto convexo é uma estrela. Em particular, uma bola é uma estrela.

**Exemplo 2.3** O conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  não é simplesmente conexo. Dada uma linha fechada em torno da origem não é possível deformá-la num ponto. No entanto, qualquer linha  $\Gamma$  fechada em torno da origem é homotópica à circunferência centrada na origem e raio igual a um. De facto, seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  o caminho que descreve a linha  $\Gamma$ . É claro que a função  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\alpha(t) = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$$

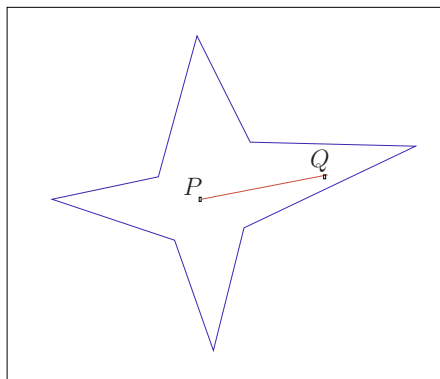


Figura 4: Conjunto em estrela

é um caminho que descreve a circunferência centrada na origem e raio igual a um. Assim, a função

$$H(s, t) = \alpha(t) + s(\gamma(t) - \alpha(t))$$

estabelece a referida homotopia.

**Exemplo 2.4** O conjunto  $\mathbb{R}^3 \setminus L$ , em que  $L$  é uma semirecta, é um conjunto em estrela e, portanto, é simplesmente conexo.

**Exemplo 2.5** O conjunto  $\mathbb{R}^3 \setminus L$ , em que  $L$  é uma recta, não é simplesmente conexo. Não é possível deformar continuamente uma circunferência, centrada na recta  $L$  e situada sobre um plano perpendicular a  $L$ , num ponto de  $\mathbb{R}^3 \setminus L$ .

**Exemplo 2.6** O conjunto  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ , não é em estrela mas é simplesmente conexo. Qualquer linha fechada neste conjunto pode ser continuamente deformada num ponto qualquer distinto da origem.

**Exemplo 2.7** Consideremos o campo  $F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ . Já sabemos que  $F$  é fechado no seu domínio  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Para além disso, o integral de linha de  $F$  ao longo de qualquer circunferência centrada na origem e percorrida uma vez no sentido positivo tem o valor  $2\pi$ .

Seja  $\Gamma$  uma linha fechada em torno da origem e descrita por um caminho  $\alpha$ , tal como se ilustra na Figura 5. É claro que  $\Gamma$  é homotópica à circunferência  $C$ , centrada na origem, percorrida no mesmo sentido de  $\Gamma$  e descrita por um caminho  $g$ . Portanto, temos

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\alpha = \int_C F \cdot dg = 2\pi.$$

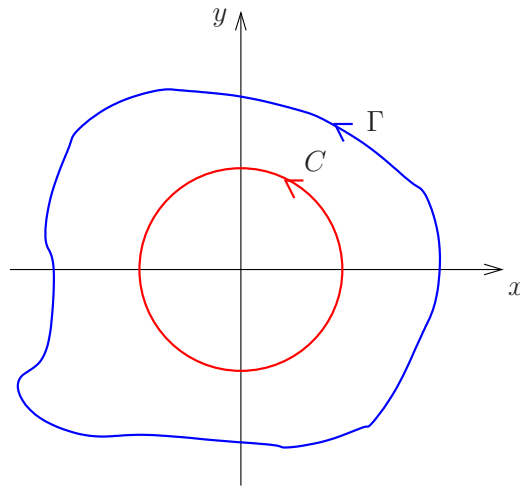


Figura 5:

Se a origem não se encontrar no conjunto limitado pela linha  $\Gamma$ , tal como se mostra na Figura 6, então a linha  $\Gamma$  será homotópica a um ponto e, portanto, o integral de linha de  $F$  em  $\Gamma$  será nulo.

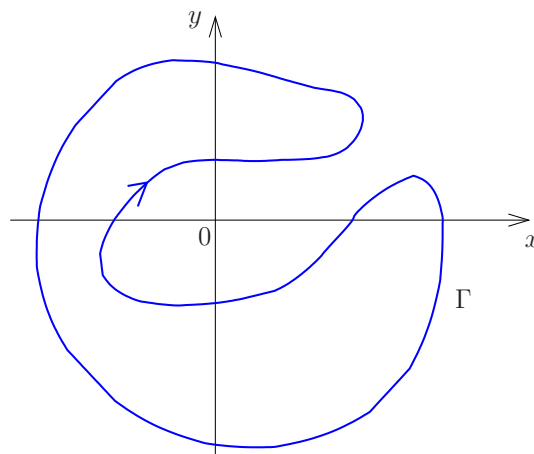


Figura 6:

Portanto, o integral de linha de  $F$  ao longo de uma linha fechada e percorrida uma vez no sentido positivo só pode tomar os valores 0 e  $2\pi$ .

**Exemplo 2.8** Consideremos o campo

$$F(x, y, z) = \left( -\frac{z}{x^2 + z^2}, y, \frac{x}{x^2 + z^2} \right).$$

O domínio de  $F$  é o conjunto  $S = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$  e facilmente se verifica que  $F$  é um campo fechado. Embora  $S$  não seja um conjunto simplesmente conexo, as possíveis linhas fechadas,  $\Gamma \subset S$ , serão de dois tipos: ou serão homotópicas a um ponto ou serão homotópicas à circunferência  $C$  definida por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1; y = 0\}.$$

Na figura 7 ilustra-se o caso de uma linha homotópica à circunferência  $C$ .

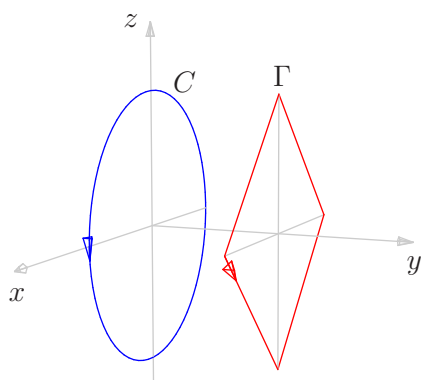


Figura 7:

No primeiro caso o integral de linha de  $F$  será nulo. No segundo caso, suponhamos que  $\Gamma$  é homotópica à circunferência  $C$  percorrida uma vez no sentido positivo quando vista de um ponto da forma  $(0, y, 0)$  com  $y > 0$ , tal como se ilustra na figura 7. Então,

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_C F \cdot dg,$$

em que  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é o caminho que descreve  $C$ , ou seja,

$$g(t) = (\cos t, 0, \sin t).$$

Portanto, teremos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_C F \cdot dg \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos t, 0, \sin t) \cdot (\cos t, 0, \sin t) dt \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

**Exemplo 2.9** Consideremos o campo vectorial

$$F(x, y, z) = \left( -\frac{y}{(x-1)^2 + 4y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + 4y^2}, z \right).$$

e o caminho fechado que descreve a linha quadrada no plano  $z = 1$  que une os pontos  $(0, -1, 1)$ ,  $(2, -1, 1)$ ,  $(2, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$  e percorrida por esta ordem. Seja  $C$  esta linha.

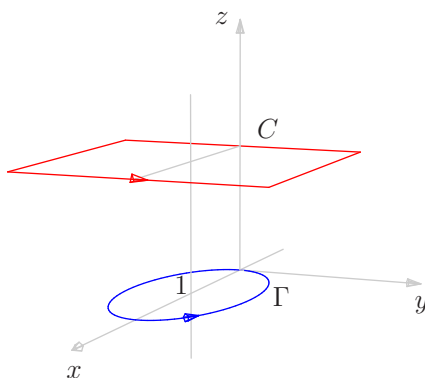


Figura 8:

Note-se que o domínio de  $F$  é o conjunto  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1; y = 0\}$ .

Consideremos também a elipse  $\Gamma$ , definida por  $(x-1)^2 + 4y^2 = 1; z = 0$ , percorrida no sentido anti-horário quando observada do ponto  $(1, 0, 5)$ .

Seja  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , o caminho definido por

$$\gamma(t) = \left( 1 + \cos t, \frac{\sin t}{2}, 0 \right),$$

e que descreve a elipse  $\Gamma$ .

Usando a definição para integrais de linha de campos vectoriais temos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\sin t}{2}, \cos t, 0 \right) \cdot \left( -\sin t, \frac{\cos t}{2}, 0 \right) dt = \pi. \end{aligned}$$

É fácil ver que o campo  $F$  é fechado. Dado que o quadrado  $C$  e a elipse  $\Gamma$  são linhas fechadas e homotópicas no domínio deste campo, tal como se ilustra na figura 8, podemos concluir que

$$\int_C F \cdot dg = \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \pi,$$

em que  $g$  é um caminho que descreve  $C$ .

Note-se que é fácil calcular, pela definição, o integral de linha do campo  $F$  ao longo da elipse  $\Gamma$ . O mesmo não acontece para a linha  $C$ .

\*\*\*

Relembremos que um campo gradiente é necessariamente fechado e que o respectivo integral de linha é nulo em caminhos fechados.

Por outro lado, num conjunto simplesmente conexo, o integral de linha de um campo vectorial fechado é nulo nos caminhos fechados.

Veremos que um campo vectorial fechado  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  é gradiente desde que  $S \subset \mathbb{R}^n$  seja simplesmente conexo.

Sejam  $P$  e  $Q$  dois pontos em  $S$  e suponhamos que o integral de linha de um campo vectorial contínuo ao longo de qualquer linha fechada é nulo. Então é claro que o integral de linha desse campo é independente da linha que une os dois pontos  $P$  e  $Q$ .

Fixemos um ponto  $P$  em  $S$  e seja  $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  o campo escalar definido por

$$\phi(x) = \int_{\Gamma} F$$

em que  $\Gamma$  é uma linha em  $S$  que une o ponto  $P$  ao ponto  $x \in S$ . Este campo está bem definido porque o integral de linha de  $F$  é independente da linha que une os pontos  $P$  e  $x$ .

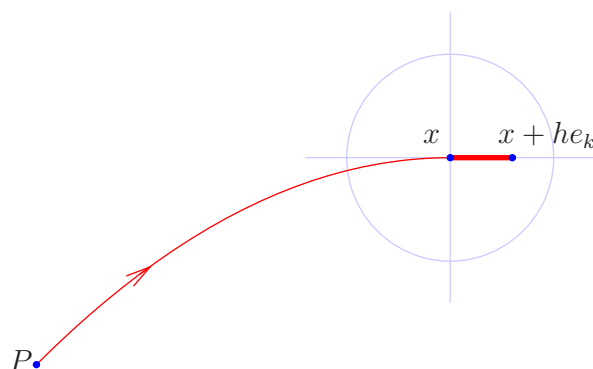


Figura 9:

De seguida veremos que o campo  $\phi$  é um potencial escalar de  $F$ , ou seja,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = F_k; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Consideremos o segmento de recta  $[x, x + he_k] \subset S$ , em que  $e_k$  é o vector unitário de  $\mathbb{R}^n$  com todas as componentes nulas excepto a  $k$ -ésima que é igual a um, tal como se ilustra na Figura 9.

Dado que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x + he_k) - \phi(x)}{h},$$

e sendo o integral de linha de  $F$  independente do caminho percorrido, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x + he_k) - \phi(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[x, x+he_k]} F \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h F(x + te_k) \cdot e_k dt \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h F_k(x + te_k) dt \\
&= F_k(x).
\end{aligned}$$

Portanto, se o integral de linha de um campo vectorial contínuo é independente do caminho percorrido, então esse campo é um gradiente.

Assim, podemos enunciar o seguinte teorema (c.f. [2]).

**Teorema 2.1** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto simplesmente conexo e  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vectorial de classe  $C^1$ .*

*Então o campo  $F$  é um gradiente se e só se  $F$  for um campo fechado.*

\*\*\*

**Nota 2.1** Note-se que a invariância do integral de linha de um campo fechado em caminhos homotópicos foi estabelecida para o caso em que a homotopia,  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , é de classe  $C^2$ , recorrendo à regra de Leibniz.

Para o caso geral, em que a homotopia é uma função contínua, apresentamos sucintamente as ideias centrais da prova da invariância do integral de linha (c.f. [2]).

Seja  $S \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vectorial fechado e sejam  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dois caminhos fechados e homotópicos em  $S$  que descrevem, respectivamente, as linhas  $\Gamma_\alpha$  e  $\Gamma_\beta$ .

Note-se que, sendo fechado, o campo  $F$  é localmente gradiente. Sejam  $\{B_i\}$  as bolas em que  $F$  é gradiente e tais que

$$H([0, 1] \times [0, 1]) \subset \bigcup B_i.$$

Dado que o intervalo  $I = [0, 1] \times [0, 1]$  é compacto, podemos dividi-lo em subintervalos  $\{I_{jk}\}$  tais que, para cada par de índices  $j, k$ , existe uma bola  $B_i$  verificando a propriedade

$$H(I_{jk}) \subset B_i.$$

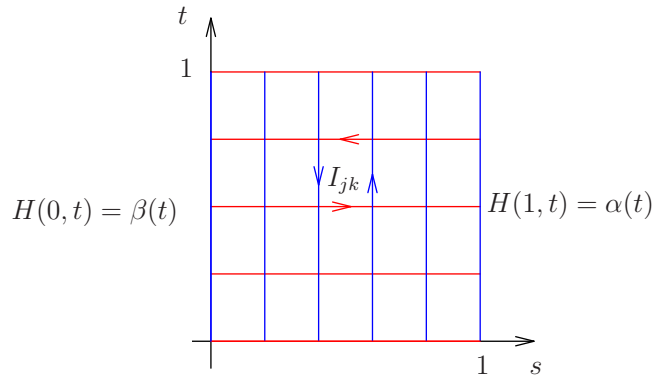


Figura 10:

Sendo  $\partial I_{jk}$  a fronteira do subintervalo  $I_{jk}$ , então  $H(\partial I_{jk})$  é uma linha fechada em  $B_i$ . Como  $F$  é fechado em  $B_i$ , teremos

$$\int_{\partial I_{jk}} F = 0$$

Portanto,

$$0 = \sum_{j,k} \int_{\partial I_{jk}} F = \int_{\Gamma_\alpha} F \cdot d\alpha - \int_{\Gamma_\beta} F \cdot d\beta,$$

ou seja,

$$\int_{\Gamma_\alpha} F \cdot d\alpha = \int_{\Gamma_\beta} F \cdot d\beta.$$

Note-se que os segmentos de recta da fronteira de cada subintervalo  $I_{jk}$  contribuem duas vezes, em sentidos opostos, para a soma anterior tal como se ilustra na Figura 10.

Podemos concluir então que o integral de linha de um campo vectorial fechado é invariante para caminhos homotópicos.

\*\*\*

## Referências

- [1] Tom M. Apostol. *Calculus II*. Editorial Reverté, SA, 1977.
- [2] M. P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [3] Luís T. Magalhães. *Integrais em Variedades e Aplicações*. Texto Editora, 1993.
- [4] J. E. Marsden and A. J. Tromba. *Vector Calculus*. W. H. Freeman and Company, 1998.