Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

MAP2 - 17 de Maio de 2023 - 18h
Duração: 45m

Apresente e justifique todos os cálculos

Resolução

(5 val.) 1. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^2y - y^2 - y.$$

Resolução

Temos $\nabla f(x,y) = (2xy, x^2 - 2y - 1)$. Logo, os pontos críticos, para os quais $\nabla f(x,y) = 0$ são $(0, -\frac{1}{2}), (1,0), (-1,0)$. A Hessiana de f é dada por

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -2 \end{bmatrix},$$

e

$$H_f(\pm 1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad H_f(0, -\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A Hessiana de f nos pontos $(\pm 1, 0)$ tem determinante negativo pelo que os seus valores próprios têm sinais opostos. Logo $(\pm 1, 0)$ são pontos em sela. A Hessiana de f no ponto $(0, -\frac{1}{2})$ tem dois valores próprios negativos pelo que este ponto é um máximo local.

2. Considere o sistema:

$$\begin{cases} x^2y^2 + x + z + w = 1 \\ \sin(xy) + e^{y+w} = e^2 \end{cases}$$

(4 val.) (a) Justifique que numa vizinhança de $(x,y,z,w) = (0,1,0,1)$ as soluções do sistema podem ser explicitadas na forma $(z,w) = f(x,y)$.

Resolução

Seja $F(x,y,z,w) = (x^2y^2 + x + z + w - 1, \sin(xy) + e^{y+w} - e^2)$. O conjunto das soluções do sistema é dado pelo conjunto de nível de f correspondente ao valor $(0,0)$. Temos,

$$DF(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} 2xy^2 + 1 & 2x^2y & 1 & 1 \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) + e^{y+w} & 0 & e^{y+w} \end{bmatrix}$$

e

$$DF(0,1,0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & e^2 & 0 & e^2 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\det \frac{\partial F}{\partial(z,w)}(0,1,0,1) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} = e^2 \neq 0.$$

O teorema da função implícita garante então que todas as soluções do sistema numa vizinhança aberta de $(0,1,0,1)$ podem ser descritas na forma $(z,w) = f(x,y)$ onde f é de classe C^1 e $f(0,1) = (0,1)$.

(4 val.) (b) Justifique que f é localmente invertível em $(0,1)$ e determine $Df^{-1}(0,1)$.

Resolução

Seja $\alpha(x,y) = (x,y,f(x,y))$. Temos que $F \circ \alpha = 0$ numa vvizinhança aberta de $(0,1)$. Logo

$$0 = D(F\circ\alpha)(0,1) = DF(0,1,0,1)\cdot D\alpha(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & e^2 & 0 & e^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,1) \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$Df(0,1) = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-e^2}{e^2} & 1 \\ \frac{-1}{e^2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Como $\det Df(0,1) \neq 0$ segue do teorema da função inversa que f é localmente invertível. De outro modo, como

$$\det \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,1,0,1) = e^2 \neq 0,$$

também segue, pelo teorema da função implícita, que na vizinhança de $(0,1,0,1)$ as soluções do sistema $F(x,y,z,w) = 0$ podem ser escritas na forma $(x,y) = g(z,w)$ sendo que, numa vizinhança de $(z,w) = (0,1)$, g é a inversa de f.

(4 val.) 3. Seja $f(x,y,z) = x + y + z^2 - 1$. Determine os valores máximo e mínimo de f no conjunto

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\right\}.$$

Resolução

A é um conjunto compacto e segue do teorema de Weierstrass que f tem máximo e mínimo em A.

Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = & 4 \\ \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla F(x,y,z) & \iff & (1,1,2z) = \lambda(2x,2y,2z). \end{cases}$$

Temos quatro soluções $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$, $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0)$. Substituindo em f obtemos os valores $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right) = \frac{7}{2}$, $f(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0) = \pm 2\sqrt{2} - 1$. Logo, o ponto de mínimo é $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$ e os pontos de máximo são $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.

(3 val.) 4. Seja $n > k$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ uma função de classe C^1 tal que o conjunto de nível

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$$

é não vazio, e tal que existe $a \in S_0$ com a característica de $DF(a)$ igual a k. Mostre que para qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$ com $||\varepsilon||$ suficientemente pequena o conjunto de nível

$$S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = \varepsilon\}$$

é não-vazio.

Resolução

Considere a função, de classe C^1, $G(x, \varepsilon) = F(x) - \varepsilon$. Temos $G(a, 0) = 0$. Por outro lado, na matriz

$$DG(a, 0) = [DF(a, 0)| - I_k]$$

existem, entre as primeiras n colunas, k colunas linearmente independentes que vamos, sem perda de generalidade assumir que são as primeiras k colunas. Escrevendo $x = (y, z), y \in \mathbb{R}^k, z \in \mathbb{R}^{n-k}$, temos que numa vizinhança de $(a, 0)$ o sistema de equações $G(x, \varepsilon) = 0 \iff F(x) = \varepsilon$ tem soluções da forma $y = f(z, \varepsilon)$ para f de classe C^1 e para (z, ε) numa vizinhança aberta de $(z(a), 0)$. Logo, $(f(z, \varepsilon), z, \varepsilon) \in S_\varepsilon$, para (z, ε) numa vizinhança aberta de $(z(a), 0)$.