

## CDI-2

2º MAP45 (Versão B) - 17 de Maio de 2023 - 18h - Duração: 45 min

Nome: \_\_\_\_\_

Número: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_ Sala: \_\_\_\_\_

---

**Justifique todas as respostas**

---

(5 val.)

1. Determine e classifique os pontos críticos da função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = xy^2 - x^2 - x.$$

2. Considere o sistema:

$$\begin{cases} \sin(xy) + e^{x+z} = e^2 \\ x^2y^2 + y + z + w = 1 \end{cases}$$

(4 val.)

(a) Justifique que numa vizinhança de  $(x, y, z, w) = (1, 0, 1, 0)$  as soluções do sistema podem ser explicitadas na forma  $(z, w) = f(x, y)$ .

(4 val.)

(b) Justifique que  $f$  é localmente invertível em  $(1, 0)$  e determine  $Df^{-1}(1, 0)$ .

(4 val.)

3. Seja  $f(x, y, z) = x + z + y^2 - 2$ . Determine os valores máximo e mínimo de  $f$  no conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2\}.$$

(3 val.)

4. Seja  $n > k$  e  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  uma função de classe  $C^1$  tal que o conjunto de nível

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$$

é não vazio, e tal que existe  $a \in S_0$  com a característica de  $DF(a)$  igual a  $k$ . Mostre que para qualquer  $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$  com  $\|\varepsilon\|$  suficientemente pequena o conjunto de nível

$$S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = \varepsilon\}$$

é não-vazio.