DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

CDI-2

1º MAP45 (Versão A) - 22 de março de 2023 - 18h - Duração: 45 min

Resolução abreviada

1. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+x(y-x)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) **(3 val.)** Determine o conjunto dos pontos de continuidade de f;

Solução: Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, a função é contínua pois é um quociente de duas funções contínuas (polinómios) em que o denomindador não se anula. Em $(0,0)$, a função não é contínua pois tem distintos limites direcionais:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x+m-1}{1+m^2} = \frac{m-1}{1+m^2}\,.$$

(b) **(3 val.)** Seja $v = (1,1)$. Calcule, se existir, a derivada de f segundo v na origem, $D_v f(0,0)$.

Solução: Pela definição,

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{2t^3} = \frac{1}{2}\,.$$

(c) **(3 val.)** Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$

Solução:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3+x(y-x)}{x^2+y^2}\right)\Bigg|_{(x,y)=(0,1)} \\ &= \frac{(3x^2+y-2x)(x^2+y^2) - 2x(x^3+x(y-x))}{(x^2+y^2)^2}\Bigg|_{(x,y)=(0,1)} = 1. \end{aligned}$$

2. (4 val.) Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,z) = (x^2e^z + \operatorname{sen}(xy), 2xy + z^2)$ e seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, diferenciável, tal que $g(1) = (1,1,0)$ e $Dg(1) = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right]$. Calcule $D(f \circ g)(1)$.

Solução: f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$ porque é de classe C^1. Pelo teorema de derivação da função composta, $f \circ g$ é diferenciável e

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(1) &= Df(g(1))Dg(1) \\ &= \begin{bmatrix} 2xe^z + y\cos(xy) & x\cos(xy) & x^2e^z \\ 2y & 2x & 2z \end{bmatrix}\Bigg|_{(x,y,z)=(1,1,0)} Dg(1) \\ &= \begin{bmatrix} 2+\cos(1) & \cos(1) & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 3\cos(1) \\ 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. (4 val.) Considere a curva

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{(x+y)^4}{4} + e^{y^2} = e \right\}.$$

Determine os pontos de C em que a reta tangente é horizontal.

Solução: Seja $F(x,y) = \frac{(x+y)^4}{4} + e^{y^2}$. A curva C é o conjunto de nível $F^{-1}(e)$. Para cada $(x,y) \in C$, $\nabla f(x,y)$ é um vetor perpendicular a C, não nulo. Logo, (x,y) é um ponto de C onde a reta tangente é horizontal *sse* $F(x,y) = e$ e $\nabla F(x,y)$ é vertical, ou seja $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0$. Temos,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \\ F(x,y) = e \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 = 0 \\ F(x,y) = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ e^{y^2} = e \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x,y) = (1,-1) \vee (x,y) = (-1,1). \end{aligned}$$

Concluímos que os pontos onde a reta tangente a C é horizontal são $(1,-1)$ e $(-1,1)$.

4. (3 val.) Considere a função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} |x|^{3/2}\ln(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,), & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Determine se f é diferenciável na origem. Em caso afirmativo, calcule $Df(0,0,0)$.

Solução: Notando que f é nula nos eixos Oy e Oz, vemos que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 0$. Calculando $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)$ pela definição, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{|t|^{3/2}\ln|t|}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}|t|^{/1/2}\ln|t| = 0,$$

pois $\lim_{t\to 0^+} t^{1/2}\ln t = 0$.

Denotando $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, temos

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x,y,z) - f(0,0,0) - \nabla f(0,0,0)\cdot(x,y,x)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| &= \frac{|x|^{3/2}|\ln r|}{r} \\ &\leq \frac{r^{3/2}|\ln r|}{r} = r^{1/2}|\ln r|. \end{aligned}$$

Como $\lim_{r\to 0^+} r^{1/2}\ln r = 0$, concluímos que f é diferenciável em $(0,0,0)$ e $Df(0,0,0) = [\,0\ 0\ 0\,]$.