

**Cálculo Diferencial e Integral II**  
**Exame 2 - 7.Jul.2010 - 13h**  
(Apresente e justifique todos os cálculos)

1. Considere a função  $f: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida pela expressão

$$f(x, y) = x \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{xy} \right).$$

- [1 val.] (a) Determine os pontos de  $\mathbb{R}^2$  aos quais  $f$  pode ser prolongada por continuidade.
- [1 val.] (b) Calcule a derivada de  $f$  segundo o vector  $(2, 1)$  no ponto  $(x, y) = (1, 1)$ .
- [1 val.] (c) Sendo  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida pela expressão  $g(t) = (1 + \cos t, e^t)$ , determine  $D(g \circ f)(1, 1)$ .
- [1 val.] (d) Seja  $h(x, y) = f(x - f(x, y), y + x^2 - 1)$ . Calcule  $\frac{\partial h}{\partial y}(1, 1)$ .

2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} xy + z^2 = 1 \\ x^2 - y^2 + 3 = 0. \end{cases}$$

[1 val.] Mostre que o sistema define  $x$  e  $y$  como funções de  $z$  numa vizinhança do ponto  $(x, y, z) = (1, -2, \sqrt{3})$  e calcule  $\frac{dx}{dz}(\sqrt{3})$ .

[1.5 val.] 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função  $g(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$ .

4. Considere o conjunto  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + yz = 3, \quad xz + y = 1\}$ .

- [1 val.] (a) Mostre que  $A$  é uma variedade e determine a sua dimensão.
- [1 val.] (b) Determine bases para os espaços tangente e normal a  $A$  em  $(0, 1, 3)$ .

[1.5 val.] 5. Sejam  $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^1$  tais que

- $\nabla f(x, y, z) \neq 0$  para todo o  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,
- Existe uma função contínua  $\lambda: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla g = \lambda \nabla f$ .

Mostre que para cada  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  existe um aberto  $V$  contendo  $(x, y, z)$ , um aberto  $W$  contendo  $f(x, y, z)$ , e uma função  $\alpha: W \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que  $g = \alpha \circ f$  em  $V$ .

*Sugestão: Comece por considerar o caso em que  $f(x, y, z) = x$  e depois faça uma mudança de variável conveniente.*

## Teste 2

- [1,5 val.] 6. Determine os valores máximo e mínimo que a função  $g(x, y) = xy + 2x$  assume na circunferência dada pela equação  $x^2 + y^2 = 4$ .

- [1,5 val.] 7. Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0; y > x; 0 < z < 4 - y^2\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de  $V$  em termos de integrais iterados da forma  $\int(\int(\int dz)dy)dx$ .

- [1,5 val.] 8. Calcule o volume do sólido

$$S = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 : z < 4 - (x^2 + y^2)^2; 0 < y < x; 0 < z < 1\}.$$

- [1 val.] 9. Calcule a massa total de um aro que une os pontos  $(1, 0, 0)$  e  $(1, 2, 4)$  e que é descrito pelas equações:

$$x^2 + y^2 - z = 1, \quad z = y^2,$$

sabendo que a densidade de massa é dada pela função  $f(x, y, z) = z\sqrt{1 + 4y^2}$ .

- [1,5 val.] 10. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo  $F(x, y, z) = (1 - x^2, yx, xz)$  através da superfície

$$S = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; x > 0; z > 0\},$$

segundo a normal com terceira componente positiva.

- [1,5 val.] 11. Use o teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional do campo  $F(x, y, z) = (x, -z, y)$  através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2 - \sqrt{y^2 + z^2}; 0 < x < 1\},$$

segundo a normal com primeira componente positiva.

- [1,5 val.] 12. Seja  $B \subset \mathbb{R}^3$  a bola de raio um e centro na origem e  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ , tal que  $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}, k > 0$ . Prove que

$$\iiint_B f = \frac{1}{k(k+3)} \iiint_B \operatorname{div}(\nabla f).$$