

Cálculo Diferencial e Integral II  
Repescagem do MAP 3 - V1 - 10 de Junho de 2023 - 8h  
Duração: 1h

Nome: \_\_\_\_\_

Número: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_ Sala: \_\_\_\_\_

---

**Apresente e justifique todas as respostas**

---

[5.0 val.] 1. Determine uma expressão para o volume do conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < y < 1; y - x < z < 1\},$$

na forma de integrais do tipo  $\int(\int(\int dx)dy)dz$ . Não precisa de calcular o volume.

- [5.0 val.] 2. Usando uma mudança de variáveis adequada, calcule o integral da função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x, y, z) = z$ , no conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 < 1; z > \sqrt{2x^2 + 2y^2}; y > 0\}.$$

3. Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vectorial definido por

$$f(x, y, z) = (\cos((x + y - 1)^2) - x^2, \cos((x + y - 1)^2), z^2)$$

e  $\gamma$  um caminho que descreve o arco da elipse de equações  $x + y = 1$  ;  $x^2 + z^2 = 1$  que vai do ponto  $(1, 0, 0)$  para o ponto  $(0, 1, 1)$ .

- [4.0 val.] a) Calcule o trabalho de  $f$  ao longo do segmento de recta que vai do ponto  $(1, 0, 0)$  para o ponto  $(0, 1, 1)$ .

[3.0 val.]

b) Determine o integral de  $f$  ao longo de  $\gamma$ .

[3.0 val.]

4. Sejam  $A \subset \mathbb{R}^2$  aberto, e  $D$  um intervalo aberto, limitado e tal que  $\overline{D} \subset A$ . Prove que se  $f \in C^1(A)$  e  $g \in C^2(A)$  são dois campos escalares em  $A$  tais que  $f$  é nulo em  $\partial D$  então

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} dx dy = \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} dx dy.$$