Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

MAP1-v1 - 22 de Março de 2024 - 18h
Duração: 45 minutos

Resolução abreviada

1. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, uma função contínua definida, para $(x,y)\neq(0,0)$, por

$$f(x,y)=\frac{x^2y+3xy^2}{2x^2+y^2}$$

[4.0] a) Mostre que $f(0,0)=0$.

Resolução: Como f é contínua,

$$f(0,0)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y)=0$$

pois

$$0\leq|f(x,y)-0|\leq\left|\frac{x^2y+3xy^2}{2x^2+y^2}\right|\leq|y|\cdot\frac{x^2}{2x^2+y^2}+3|x|\cdot\frac{y^2}{2x^2+y^2}\leq|y|+3|x|$$

e o membro da direita é um infinitésimo na origem.

[4.0] b) Calcule o gradiente de f na origem e o valor da derivada de f na origem segundo o vector $(1,1)$. Indique se f é diferenciável na origem.

Resolução: Tem-se que $f'_x(0,0)=F'(0)$ com $F(x)=f(x,0)=0$ e $f'_x(0,0)=G'(0)$ com $G(y)=f(0,y)=0$, logo $\nabla f(0,0)=(0,0)$. Por sua vez, $f'_{(1,1)}=H'(0)$ com

$$H(t)=f((0,0)+t(1,1))=\begin{cases}\frac{4t^3}{3t^2} & \text{se } t\neq 0\\ 0 & \text{se } t=0\end{cases}=\frac{4}{3}t,$$

logo $f'_{(1,1)}(0,0)=\frac{4}{3}$.

[4.0] 2. Seja $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ dada por $g(x,y)=(xy,\,e^{xy},\,x^2-y^2)$ e seja $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ uma função diferenciável tal que

$$Df(0,1,1)=\begin{bmatrix}1&2&3\\5&4&2\end{bmatrix}.$$

Calcule $D(f\circ g)(1,0)$.

Resolução: Como todas as funções coordenadas de g são diferenciáveis, por serem polinomiais ou a composta de uma exponencial com uma função polinomial, g é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Como f também é diferenciável, o teorema da composta garante que $f\circ g$ é diferenciável e que

$$D(f\circ g)(1,0)=Df(g(1,0))Dg(1,0)=Df(0,1,1)Dg(1,0)=\begin{bmatrix}1&2&3\\5&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y&x\\y\,e^{xy}&x\,e^{xy}\\2x&-2y\end{bmatrix}_{(1,0)}$$

Assim, a jacobiana que se pretende calcular é

$$D(f\circ g)(1,0)=\begin{bmatrix}1&2&3\\5&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&3\\4&9\end{bmatrix}.$$

[5.0] 3. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x-2)^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{9} = 9\}.$$

Determine o plano tangente ao conjunto A no ponto $(2,0,8)$, e verifique que o plano apenas interseta A no ponto de tangência.

Resolução: O conjunto A é um conjunto de nível da função $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ definida por

$$F(x,y,z) = (x-2)^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{9}$$

pelo que o vector $\nabla F(x,y,z) = \left(2(x-2), \frac{y}{2}, \frac{2(z+1)}{9}\right) \neq (0,0,0)$ é normal a em cada ponto $(x,y,z) \in A$. Assim o plano tangente no ponto $(2,0,8)$ é o plano que admite por equação

$$(x-2, y, z-8) \cdot \nabla F(2,0,8) = 0 \ \Leftrightarrow \ z - 8 = 0.$$

Notando que $(x,y,z) \in A \ \Rightarrow \ \frac{(z+1)^2}{9} \leq 9$, conclui-se que, para qualquer ponto $(x,y,z) \in A$, $z \leq 8$ e que o único desses pontos de A com $z = 8$ é o ponto $(2,0,8)$. Então, o plano $z = 8$ só intersecta A no ponto de tangência.

[3.0] 4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável cujas derivadas parciais são nulas em todos os pontos. Mostre que f é constante.

Resolução: Como f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ é possível aplicar o Teorema de Lagrange em cada par de pontos de $\mathbb{R}^2$. Sejam, então, a e b quaisquer pontos de $\mathbb{R}^2$. Tem-se

$$f(b) - f(a) = f'_{b-a}(a + \theta(b-a)) \quad , \quad \text{com } \theta \in]0,1[.$$

Como f é diferenciável em $c = a + \theta(b-a)$,

$$f'_{b-a}(c) = \nabla f(c) \cdot (b-a) = (0,0) \cdot (b-a) = 0$$

logo $f(a) = f(b)$. Como a e b são quaisquer, f é constante.