Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

MAP1-v2 - 22 de Março de 2024 - 19h

Duração: 45 minutos

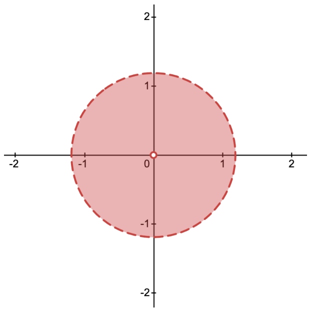
Resolução abreviada

1. Considere o conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 2\}$ e as funções $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x,y) = \frac{4x - x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad g(x,y) = \operatorname{sen}(x-y) + \mathrm{e}^{xy}.$$

[1.0] a) Determine a fronteira do conjunto D.

Resolução: O esboço do conjunto é o seguinte:



Assim, $\mathrm{fr}(D) = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$.

[4.0] b) Indique se f é prolongável por continuidade à origem.

Resolução: Pretende averiguar-se se existe e é finito o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x - x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{1}$$

Calculando os limites direcionais ao longo de retas da forma $y = mx$, para $m \in \mathbb{R}$, obtém-se:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{4x - x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{4x - x^2 - m^2x^2}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x(4 - x - m^2x)}{|x|\sqrt{1+m^2}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{1+m^2}} & \text{se } x \to 0^+; \\[2mm] \dfrac{-4}{\sqrt{1+m^2}} & \text{se } x \to 0^-. \end{cases}$$

Para além destes limites dependerem de m, dependem também de se tomar $x \to 0^+$ ou $x \to 0^-$. Assim, o limite (1) não existe. Em particular, a função f não é prolongável por continuidade à origem.

[3.0] c) Determine, caso exista, a derivada de g segundo o vector $(-1,1)$ no ponto $(0, \frac{\pi}{2})$.

Resolução: Tem-se

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \cos(x-y) + ye^{xy}; \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\cos(x-y) + xe^{xy},$$

que são contínuas em $\mathbb{R}^2$. Assim, g é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, logo é diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Portanto, vale a fórmula

$$D_{(-1,1)}g(0,\frac{\pi}{2}) = \nabla g(0,\frac{\pi}{2}) \cdot (-1,1) = (\frac{\pi}{2}, 0) \cdot (-1,1) = -\frac{\pi}{2}.$$

[4.0] 2. Considere a função $h(x,y,z) = f(xy+z^2, x+e^{yz})$ em que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é diferenciável e

$$Df(1,2) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $Dh(1,0,1)$.

Resolução: Seja $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função, diferenciável em todo o seu domínio, definida por $g(x,y) = (xy+z^2, x+e^{yz})$. Então

$$h(x,y,z) = f \circ g(x,y,z)$$

e, portanto, pela regra de derivação da função composta,

$$Dh(1,0,1) = Df(g(1,0,1)) \cdot Dg(1,0,1) = Df(1,2) \cdot Dg(1,0,1).$$

Como

$$Dg(x,y,z) = \begin{bmatrix} y & x & 2z \\ 1 & ze^{yz} & ye^{yz} \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad Dg(1,0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$Dh(1,0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Considere a curva definida por

$$B = \{(t^2, \cos t, \operatorname{sen} t) : \ t \in]-\pi, \pi[\}.$$

[3.0] a) Determine a equação do plano normal ao conjunto B no ponto $(0,1,0)$.

Resolução: Seja $\gamma(t) = (t^2, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in]-\pi, \pi[$. Então $\gamma(t) = (0,1,0) \iff t = 0$. Como

$$\gamma'(t) = (2t, -\operatorname{sen} t, \cos t),$$

vem $\gamma'(0) = (0,0,1)$. Este vetor é tangente à curva no ponto $(0,1,0)$, logo é ortogonal ao plano normal ao conjunto B no ponto $(0,1,0)$. Assim, o plano normal tem equação da forma $z = d$, para uma certa constante $d \in \mathbb{R}$. Como o ponto $(0,1,0)$ pertence ao plano, vem $d = 0$ e, portanto, a equação cartesiana do plano pedido no enunciado é:

$$z = 0.$$

[2.0] b) Determine o(s) ponto(s) de B em que a reta tangente tem a direcção do vector $(\pi, -1, 0)$.

Resolução: Observe-se que o vetor $\gamma'(t) = (2t, -\operatorname{sen} t, \cos t)$ é tangente à curva no ponto $\gamma(t) = (t^2, \cos t, \operatorname{sen} t)$. Pretende determinar-se os pontos em que o vetor $(2t, -\sin t, \cos t)$ é colinear com o vetor $(\pi, -1, 0)$, ou seja, os pontos para os quais existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$(2t, -\sin t, \cos t) = \lambda(\pi, -1, 0) \iff \begin{cases} 2t = \lambda\pi \\ -\sin t = -\lambda \\ \cos t = 0. \end{cases}$$

Uma vez que $t \in]-\pi, \pi[$, as únicas soluções são $t = \frac{\pi}{2}$ (com $\lambda = 1$) e $t = -\frac{\pi}{2}$ (com $\lambda = -1$). Assim, os pontos pedidos no enunciado são

$$\gamma(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi^2}{4}, 0, 1) \quad \text{e} \quad \gamma(-\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi^2}{4}, 0, -1).$$

[3.0] 4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \tag{2}$$

Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

Resolução: Comecemos por observar que, uma vez que f é contínua, então

$$f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2} = 0 \times 0 = 0,$$

onde na última igualdade se usou (2) Além disso,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = 0$$

uma vez que, de (2), se tem em particular (escolhendo o limite direcional com $y = 0$) $\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{|t|} = 0$. De forma análoga, deduz-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Assim, em conclusão:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-0-(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,\end{aligned}$$

o que mostra que f é diferenciável na origem.