Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

MAP1-v1 - 22 de Março de 2024 - 20h

Duração: 45 minutos

Resolução abreviada

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2y^2}{\sqrt{2x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

[4.0] a) Estude a continuidade de f.

Resolução: Pelas propriedades das funções contínuas, a função f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Dado que $|x| \leq \sqrt{2x^2+y^2}$ e $|y| \leq \sqrt{2x^2+y^2}$, tem-se

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{2x^2+y^2}} \leq |x| + 2|y|.$$

Portanto a função f é contínua na origem.
Assim, f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

[4.0] b) Determine, caso exista, a derivada de f segundo o vector $(1,1)$ no ponto $(0,0)$.

Resolução: A derivada de f segundo o vector $v = (1,1)$, no ponto $(0,0)$ é, por definição, dada por

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2+2t^2}{t\sqrt{2t^2+t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^2}{t|t|\sqrt{3}} = \lim_{t\to 0} \frac{3t}{|t|\sqrt{3}}$$

e, portanto, não existe.

2. Considere a função $h(x,y,z) = f(x^2-y^2, f(x,y,z), xz)$, sendo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1,0,1) = 0$ e $\nabla f(1,0,1) = (1,2,3)$.

[1.5] a) Calcule a derivada de f, segundo o vector $v = (2,1,2)$, no ponto $(1,0,1)$.

Resolução: $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0,1) = \nabla f(1,0,1) \cdot v = (1,2,3) \cdot (2,1,2) = 10.$

[2.5] b) Calcule $Dh(1,0,1)$.

Resolução: Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função definida por $g(x,y,z) = (x^2-y^2, f(x,y,z), xz)$.
Pelo teorema da função composta $Dh(1,0,1) = D(f\circ g)(1,0,1) = Df(g(1,0,1))Dg(1,0,1)$.
Sendo $g(1,0,1) = (1,0,1)$ e

$$Dg(1,0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$Dh(1,0,1) = D(f\circ g)(1,0,1) = Df(1,0,1)Dg(1,0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

3. Considere o conjunto

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2+y^2}{2} = z - 3\}.$$

[2.0] a) Determine o fecho de C e indique se C é compacto.

Resolução: O conjunto C é fechado porque é definido pela equação $z - \frac{x^2+y^2}{2} - 3 = 0$ que envolve funções contínuas.

Dado que $z - 3 = \frac{x^2+y^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow z \geq 3$, conclui-se que o conjunto C não é limitado e, portanto, não é compacto.

[3.0] b) Determine o plano tangente a C no ponto $(1,1,4)$.

Resolução: Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função, de classe C^1, definida por $f(x,y,z) = z - \frac{x^2+y^2}{2} - 3$. Assim, C é o conjunto nível zero da função f e o vector $\nabla f(1,1,4) = (-1,-1,1)$ é normal a C no ponto $(1,1,4)$.

O plano tangente a C no ponto $(1,1,4)$ é, então, dado pela equação $(x-1, y-1, z-4) \cdot (-1,-1,1) = 0 \Leftrightarrow -(x-1) - (y-1) + (z-4) = 0 \Leftrightarrow z - x - y - 2 = 0$.

[3.0] 4. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua tais que existe um ponto x_0 na fronteira de A onde f tem limite não nulo. Prove que o conjunto dos pontos onde f não se anula tem interior não vazio.

Resolução: Sem perda de generalidade, suponha-se que o limite de f em x_0 é positivo. Sendo f uma função contínua, existe uma bola B centrada em x_0, tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in B \cap A$. Assim, o conjunto de pontos em que f é positiva contém o aberto $B \cap A$.

Portanto, o conjunto dos pontos onde f não se anula tem interior não vazio.