Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

MAP1-v2 - 22 de Março de 2024 - 20h
Duração: 45 minutos

Resolução abreviada

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 - 2x^2}{\sqrt{x^2+2y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

[4.0] a) Estude a continuidade de f.

Resolução: Pelas propriedades das funções contínuas, a função f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Dado que $|x| \leq \sqrt{x^2+2y^2}$ e $|y| \leq \sqrt{x^2+2y^2}$, tem-se

$$|f(x,y)| \leq \frac{y^2+2x^2}{\sqrt{x^2+2y^2}} \leq |y| + 2|x|.$$

Portanto a função f é contínua na origem.
Assim, f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

[4.0] b) Determine, caso exista, a derivada de f segundo o vector $(1,-1)$ no ponto $(0,0)$.

Resolução: A derivada de f segundo o vector $v = (1,-1)$, no ponto $(0,0)$ é, por definição, dada por

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,-t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 - 2t^2}{t\sqrt{t^2+2t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2}{t|t|\sqrt{3}} = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{|t|\sqrt{3}}$$

e, portanto, não existe.

2. Considere a função $h(x,y,z) = f(xz, y^2 - x^2, f(x,y,z))$, sendo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(0,1,1) = 1$ e $\nabla f(0,1,1) = (3,2,1)$.

[1.5] a) Calcule a derivada de f, segundo o vector $v = (1,2,1)$, no ponto $(0,1,1)$.

Resolução: $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,1,1) = \nabla f(0,1,1) \cdot v = (3,2,1) \cdot (1,2,1) = 8.$

[2.5] b) Calcule $Dh(0,1,1)$.

Resolução: Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função definida por $g(x,y,z) = (xz, y^2 - x^2, f(x,y,z))$.
Pelo teorema da função composta $Dh(0,1,1) = D(f \circ g)(0,1,1) = Df(g(0,1,1))Dg(0,1,1)$.
Sendo $g(0,1,1) = (0,1,1)$ e

$$Dg(0,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$Dh(0,1,1) = D(f \circ g)(0,1,1) = Df(0,1,1)Dg(0,1,1) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Considere o conjunto

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z + 3 = \frac{x^2 + y^2}{4}\}.$$

[2.0] a) Determine o fecho de C e indique se C é compacto.

Resolução: O conjunto C é fechado porque é definido pela equação $z - \frac{x^2+y^2}{4} + 3 = 0$ que envolve funções contínuas.

Dado que $z + 3 = \frac{x^2+y^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow z \geq -3$, conclui-se que o conjunto C não é limitado e, portanto, não é compacto.

[3.0] b) Determine o plano tangente a C no ponto $(2, 2, -1)$.

Resolução: Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função, de classe C^1, definida por $f(x, y, z) = z - \frac{x^2+y^2}{4} + 3$. Assim, C é o conjunto nível zero da função f e o vector $\nabla f(2, 2, -1) = (-1, -1, 1)$ é normal a C no ponto $(2, 2, -1)$.

O plano tangente a C no ponto $(2, 2, -1)$ é, então, dado pela equação $(x - 2, y - 2, z + 1) \cdot (-1, -1, 1) = 0 \Leftrightarrow -(x - 2) - (y - 2) + (z + 1) = 0 \Leftrightarrow z - x - y + 5 = 0$.

[3.0] 4. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua tais que existe um ponto x_0 na fronteira de A onde f tem limite não nulo. Prove que o conjunto dos pontos onde f não se anula tem interior não vazio.

Resolução: Sem perda de generalidade, suponha-se que o limite de f em x_0 é positivo. Sendo f uma função contínua, existe uma bola B centrada em x_0, tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in B \cap A$. Assim, o conjunto de pontos em que f é positiva contém o aberto $B \cap A$.

Portanto, o conjunto dos pontos onde f não se anula tem interior não vazio.