

Cálculo Diferencial e Integral II  
Repescagem MAP1-VA - 10 de Julho de 2023  
Duração: 45m

Nome: \_\_\_\_\_

Número: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_ Sala: \_\_\_\_\_

---

Apresente e justifique todas as respostas

---

1. Considere as funções,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x+3y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x, y) = (3x^2 + 2y^2) \cdot f(x, y).$$

(a) **(3 val.)** Calcule, ou mostre que não existe, o limite de  $f$  em  $(0, 0)$ .

(b) **(4 val.)** Calcule as derivadas parciais  $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)$ , e verifique se  $g$  é diferenciável em  $(0, 0)$ .

2. (5 val.) Sejam  $G(x, y, z) = (e^{xy}, x + y + z, yz)$ ,  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma função diferenciável tal que  $F(0, 0, 0) = (1, 0, 2)$  e  $v \in \mathbb{R}^3$ . Sabendo que  $D_v F(0, 0, 0) = (1, 2, 3)$  calcule

$$D_v(G \circ F)(0, 0, 0).$$

3. (5 val.) Considere a linha

$$L = \left\{ \left( 2t, 3t, t^2 - t^3 + \frac{t^4}{4} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Escreva a equação cartesiana do plano normal a  $L$  no ponto  $(2, 3, \frac{1}{4})$  e determine todos os pontos da linha  $L$  que têm uma recta tangente perpendicular a esse plano.

4. (3 val.) Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que existem constantes  $K > 0$  e  $\alpha > 1$  satisfazendo,

$$|f(x, y)| \leq K\|(x - 1, y)\|^\alpha,$$

para todo  $(x, y)$ . Mostre que  $f$  é diferenciável em  $(1, 0)$ .