

Cálculo Diferencial e Integral II
Repescagem MAP1-VB - 10 de Julho de 2023
Duração: 45m

Nome: _____

Número: _____ Curso: _____ Sala: _____

Apresente e justifique todas as respostas

1. Considere as funções, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{3x+4y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{e} \quad h(x, y) = (4x^2 + 3y^2) \cdot g(x, y).$$

(a) **(3 val.)** Calcule, ou mostre que não existe, o limite de g em $(0, 0)$.

(b) **(4 val.)** Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial h}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial h}{\partial y}(0, 0)$, e verifique se h é diferenciável em $(0, 0)$.

2. (5 val.) Sejam $F(x, y, z) = (2x - y + z, xz, e^{yz})$, $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função diferenciável tal que $G(1, 1, 1) = (2, 2, 0)$ e $v \in \mathbb{R}^3$. Sabendo que $D_v G(1, 1, 1) = (3, 2, 1)$, calcule

$$D_v(F \circ G)(1, 1, 1).$$

3. (5 val.) Considere a linha

$$L = \left\{ \left(3t, t^2 - t^3 + \frac{t^4}{4}, 5t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Escreva a equação cartesiana do plano normal a L no ponto $(3, \frac{1}{4}, 5)$ e determine todos os pontos da linha L que têm uma recta tangente perpendicular a esse plano.

4. (3 val.) Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existem constantes $K > 0$ e $\beta > 1$ satisfazendo,

$$|f(x, y)| \leq K\|(x, y - 1)\|^\beta,$$

para todo (x, y) . Mostre que f é diferenciável em $(0, 1)$.