Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Repescagem MAP2-VA - 10 de Julho de 2023

Duração: 45m

Nome: ______________________________

Número: __________ **Curso:**__________ **Sala:**__________

Apresente e justifique todas as respostas

---

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2.$$

(5 val.) a) Determine e classifique os pontos críticos de f.

(1 val.) b) Determine se f tem mínimo absoluto no seu domínio. Justifique.

(6 val.) 2. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$F(x, y) = \operatorname{sen}(x + y) + xy + Ay,$$

sendo $A \in \mathbb{R}$ um parâmetro. Determine, justificadamente, para que valores de A a equação $F(x, y) = 0$ define y como função implícita de x, de classe C^1, numa vizinhança de $(0, 0)$. Para esses valores de A determine $y'(0)$.

(5 val.) 3. Seja $f(x, y, z) = y^2 - 2z^2$. Determine os valores máximo e mínimo de f no conjunto

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

(3 val.) 4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 uma função da forma $f(x, y) = \phi(x^2 + y^2)$ onde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^2. Sabendo que em todos os pontos a Hessiana de f é definida positiva, mostre que o único ponto que pode ser ponto crítico de f é a origem.