Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame de Recurso - V1 - 10 de Juiho de 2023 - 8h

Duração: 2h

Nome: ______________________________

Número: __________ **Curso:**__________ **Sala:**__________

Apresente e justifique todas as respostas

---

1. Considere as funções, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x+3y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x,y) = \left(3x^2 + 2y^2\right) \cdot f(x,y).$$

[1.5 val.] a) Calcule, ou mostre que não existe, o limite de f em $(0,0)$.

[1.5 val.] b) Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$, e verifique se g é diferenciável em $(0,0)$.

[2.0 val.] 2. Sejam $G(x,y,z) = (e^{xy}, x+y+z, yz)$, $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma função diferenciável tal que $F(0,0,0) = (1,0,2)$ e $v \in \mathbb{R}^3$. Sabendo que $D_vF(0,0,0) = (1,2,3)$ calcule

$$D_v(G \circ F)(0,0,0).$$

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2$.

[2.0 val.] a) Determine e classifique os pontos críticos de f.

[1.0 val.] b) Determine se f tem mínimo absoluto no seu domínio. Justifique.

[2.0 val.] 4. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$F(x, y) = \operatorname{sen}(x + y) + xy + Ay,$$

sendo $A \in \mathbb{R}$ um parâmetro. Determine, justificadamente, para que valores de A a equação $F(x, y) = 0$ define y como função implícita de x, de classe C^1, numa vizinhança de $(0, 0)$. Para esses valores de A determine $y'(0)$.

[2.0 val.] 5. Determine uma expressão para o volume do conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < y < 1;\ y - x < z < 1\},$$

na forma de integrais do tipo $\int(\int(\int\ dx)dy)dz$. Não precisa de calcular o volume.

[2.0 val.] 6. Usando uma mudança de variáveis adequada, calcule o integral da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y,z) = z$, no conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 < 1;\ z > \sqrt{2x^2 + 2y^2};\ y > 0\}.$$

7. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido por

$$f(x,y,z) = \big(\cos((x+y-1)^2) - x^2\,,\ \cos((x+y-1)^2)\,,\ z^2\big)$$

e γ um caminho que descreve o arco da elipse de equações $x + y = 1$; $x^2 + z^2 = 1$ que vai do ponto $(1,0,0)$ para o ponto $(0,1,1)$.

[1.5 val.] a) Calcule o trabalho de f ao longo do segmento de recta que vai do ponto $(1,0,0)$ para o ponto $(0,1,1)$.

[1.5 val.] b) Determine o integral de f ao longo de γ.

[3.0 val.] 8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 uma função da forma $f(x, y) = \phi(x^2 + y^2)$ onde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^2. Sabendo que em todos os pontos a Hessiana de f é definida positiva, mostre que o único ponto que pode ser ponto crítico de f é a origem.