Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame de Recurso - V2 - 10 de Juiho de 2023 - 8h

Duração: 2h

Nome: ____

Número: __________ **Curso:**__________ **Sala:**__________

Apresente e justifique todas as respostas

---

1. Considere as funções, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definidas por

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{3x+4y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad h(x,y) = \left(4x^2+3y^2\right) \cdot g(x,y).$$

[1.5 val.] a) Calcule, ou mostre que não existe, o limite de g em $(0,0)$.

[1.5 val.] b) Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)$, e verifique se h é diferenciável em $(0,0)$.

[2.0 val.] 2. Sejam $F(x, y, z) = (2x - y + z, xz, e^{yz})$, $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma função diferenciável tal que $G(1, 1, 1) = (2, 2, 0)$ e $v \in \mathbb{R}^3$. Sabendo que $D_v G(1, 1, 1) = (3, 2, 1)$, calcule

$$D_v(F \circ G)(1, 1, 1).$$

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3.$$

[2.0 val.] a) Determine e classifique os pontos críticos de f.

[1.0 val.] b) Determine se f tem mínimo absoluto no seu domínio. Justifique.

[2.0 val.] 4. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$F(x, y) = \operatorname{sen}(x + y) + xy - Ax,$$

sendo $A \in \mathbb{R}$ um parâmetro. Determine, justificadamente, para que valores de A a equação $F(x, y) = 0$ define x como função implícita de y, de classe C^1, numa vizinhança de $(0, 0)$. Para esses valores de A determine $x'(0)$.

[2.0 val.] 5. Determine uma expressão para o volume do conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < x < 1;\ x - y < z < 1\},$$

na forma de integrais do tipo $\int(\int(\int\ dy)dx)dz$. Não precisa de calcular o volume.

[2.0 val.] 6. Usando uma mudança de variáveis adequada, calcule o integral da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y, z) = 3z$, no conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 < 2 + x^2 + y^2;\ z > \sqrt{3(x^2 + y^2)};\ x > 0\}.$$

7. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido por

$$f(x, y, z) = \left(x^2,\ e^{(y+z-2)^2} - y^2\ ,\ e^{(y+z-2)^2}\right)$$

e γ um caminho que descreve o arco da elipse de equações $y + z = 2$; $x^2 + y^2 = 4$ que vai do ponto $(0, 2, 0)$ para o ponto $(2, 0, 2)$.

[1.5 val.] a) Calcule o trabalho de f ao longo do segmento de recta que vai do ponto $(0, 2, 0)$ para o ponto $(2, 0, 2)$.

[1.5 val.] b) Determine o integral de f ao longo de γ.

[3.0 val.] 8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 uma função da forma $f(x, y) = \phi(x^2 + y^2)$ onde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^2. Sabendo que em todos os pontos a Hessiana de f é definida positiva, mostre que o único ponto que pode ser ponto crítico de f é a origem.