Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame 1 - V2 - 26 de Junho de 2023 - 13h

Duração: 1h

Resolução Abreviada

[5.0 val.] 1. Calcule o integral da função $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z)=x^2$ no conjunto

$$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y>0;\ z>0;\ y-2<x<2-z\}$$

usando integrais do tipo $\int\left(\int\left(\int f(x,y,z)\,dy\right)dz\right)dx$.

Solução: As condições implicam $-2<x<2$. A intersecção de B com o plano definido por um valor de x fixo é determinada por

$$0<y<2+x;\ 0<z<2-x,$$

e o integral é

$$\int_{-2}^{2}\left(\int_0^{2-x}\left(\int_0^{2+x}x^2dy\right)dz\right)dx=\int_{-2}^{2}x^2(4-x^2)\,dx=\left[\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2}=\frac{128}{15}.$$

[5.0 val.] 2. Usando uma mudança de variáveis adequada, calcule o volume do conjunto

$$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1-x^2-y^2<z<2-2x^2-2y^2;\ x>y>0.\}$$

Solução: Em coordenadas cilíndricas (ρ,θ,z) tem-se:

$$0<\theta<\frac{\pi}{4},\ 1-\rho^2<z<2-2\rho^2.$$

Portanto, o volume do conjunto B é dado por

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^1\left(\int_{1-\rho^2}^{2-2\rho^2}\rho\,dz\right)d\rho\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^1\left(2\rho-2\rho^3-\rho+\rho^3\right)d\rho\right)d\theta=\frac{\pi}{16}.$$

3. Seja f o campo definido em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y)=\left(y-e^{(x-y)^2},e^{(x-y)^2}-x\right).$$

[3.0 val.] a) Determine o integral de f ao longo do segmento de recta que vai de $(-1,0)$ para $(0,1)$.

Solução: f é um campo vectorial de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e $\gamma:[-1,0]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(t,1+t)$ é um caminho regular que percorre o segmento de recta dado no sentido indicado. Então, o trabalho de f ao longo desse segmento é

$$\int_{-1}^{0}(1+t-e,e-t)\cdot(1,1)dt=\int_{-1}^{0}dt=1.$$

[4.0 val.] b) Verifique se f é um campo fechado e determine o integral de f ao longo do caminho $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$\gamma(t) = \left(-\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right).$$

Solução: Como $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\frac{\partial f_x}{\partial y}(x, y) = 1 + 2(x - y)e^{(x-y)^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f_y}{\partial x}(x, y) = 2(x - y)e^{(x+y)^2} - 1,$$

f não é um campo fechado. Pelo teorema de Green, sendo D o conjunto definido por $x^2 + y^2 < 1$ e $y - x > 1$, o qual é um domínio elementar,

$$\int_{\partial D} f \cdot d\gamma = \iint_D \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} dxdy = -2A_D,$$

onde ∂D é percorrida mantendo D à esquerda e $A_D = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ é a área de D.

Então,

$$-\int_\gamma f \cdot d\gamma + \int_{\gamma_1} f \cdot d\gamma_1 = \int_{\partial D} f \cdot d\gamma = 1 - \frac{\pi}{2},$$

onde γ_1 é o caminho da alínea anterior, e o integral pedido é

$$\int_\gamma f \cdot d\gamma = \frac{\pi}{2}.$$

[3.0 val.] 4. Usando adequadamente o teorema de Fubini, mostre que se tem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. (Sugestão: Suponha que existe um ponto (a, b) em que a igualdade não se verifica).

Solução: Sem perda de generalidade no ponto (a, b) tem-se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} > 0.$$

Sendo f uma função de classe C^2, existe um intervalo $I =]a_1, a_2[\times]b_1, b_2[$ que contém o ponto (a, b) onde se tem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) > 0, \ \forall (x, y) \in I.$$

Assim,

$$\iint_I \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right) dxdy > 0.$$

Usando o teorema de Fubini, tem-se

$$\begin{aligned}
0 &< \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) dy \right) dx - \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) dx \right) dy \\
&= \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, b_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, b_1) \right) dx - \int_{b_1}^{b_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a_2, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, y) \right) dy \\
&= f(a_2, b_2) - f(a_1, b_2) - f(a_2, b_1) + f(a_1, b_1) - f(a_2, b_2) + f(a_2, b_1) + f(a_1, b_2) - f(a_1, b_1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$