

Cálculo Diferencial e Integral II
Teste 1 - 7 de Novembro de 2009 - 11h - Versão 2
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

- (2 val.) 1. Calcule ou mostre que não existe o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^7 + y^7}{x^6 + y^6}.$$

- (3 val.) 2. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ as funções

$$f(x, y, z) = e^{xy+z} - 1 \quad \text{e} \quad g(t) = (\log(1-t), \cos t, t^4).$$

Calcule $D(f \circ g)(0)$ e $D(g \circ f)(0, 1, 0)$.

- (3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade do campo escalar $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$h(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - z^2 + 6z + 2x - 2y.$$

4. Considere o conjunto

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = y \text{ e } y - 2 = z\}.$$

- (2 val.) (a) Mostre que L é uma variedade e indique a sua dimensão.
- (2 val.) (b) Determine uma base para o espaço tangente a L no ponto $(0, 1, -1)$.
- (3 val.) (c) Determine o ponto de L mais próximo da origem.
- (2 val.) (d) Mostre que L é o gráfico de uma função $(y, z) = f(x)$ numa vizinhança do ponto $(0, 1, -1)$ e calcule $f'(0)$.
- (3 val.) 5. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$. Mostre que existe um ponto $y \in M$ cuja distância a x é mínima. Mostre ainda que se M é uma variedade então a recta que contém x e y é normal a M em y .