

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC

Teste 1 - 18 de Abril de 2009 - 11h - Versão 2

Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a seguinte função definida em \mathbb{R}^2 :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Estude f quanto à continuidade.

(1 val.) (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável.

(3 val.) (a) Supondo que a derivada de f no ponto $(1, 2)$ na direcção do vector $(2, -2)$ é 6, e na direcção do vector $(1, 1)$ é 1, mostre que $\nabla f(1, 2) = (2, -1)$.

(2 val.) (b) Seja $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a função $g(x, y, z) = (1 - x - z^2, 3 - y - e^z)$. Determine $D(f \circ g)(0, 0, 0)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f(x, y) = x^2 + y^2 e^{-y^2}$.

(2 val.) 4. (a) Mostre que a equação $e^x + x = 1 + 2y^2 - 2yz + z^2$ define localmente x como função de y e z (isto é $x = f(y, z)$) numa vizinhança do ponto $(0, 0, 0)$, onde f é uma função de classe C^1 .

(2 val.) (b) Calcule a derivada de f no ponto $(0, 0)$.

(2 val.) (c) Prove que f possui um mínimo local no ponto $(0, 0)$.

(3 val.) 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável tal que $\nabla f(x, y) = 0$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é constante.