Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 5 de Novembro de 2011 - 12h - Versão 2
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) 1. Calcule ou mostre que não existe o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{5x^2+y^2}.$$

(2 val.) 2. Seja $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+Ky^3}{x^2+6y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Determine K de modo que $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 2$.

(2 val.) 3. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $Df(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule a derivada parcial $\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,0)$, sabendo que

$$h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)), \quad u(x,y) = e^{-y}, \quad v(x,y) = e^{x}.$$

(3 val.) 4. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$h(x,y) = 6x + 3x^2 - 2y^2 + y^4.$$

5. Considere o conjunto

$$L = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x = e^{y+z} + \operatorname{sen}(y)\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que L é uma variedade e indique a sua dimensão.
(2 val.) (b) Determine a equação do plano tangente a L no ponto $(1,0,0)$.
(2 val.) (c) Mostre que L é o gráfico de uma função $y = g(x,z)$ numa vizinhança do ponto $(1,0,0)$ e calcule $Dg(1,0)$.

(2 val.) 6. Seja $M\subset\mathbb{R}^3$ o conjunto definido pelas equações

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ y+z = 2. \end{cases}$$

Determine o ponto de M que apresenta a maior coordenada y.

(3 val.) 7. Seja $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e tal que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Supondo que $u=0$ na fronteira do disco $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$, mostre que $u=0$ em D.