Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC
Teste 1 - 18 de Abril de 2009 - 11h - Versão 1
Duração: 90 minutos

Resolução abreviada

1. Considere a seguinte função definida em $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estude f quanto à continuidade.

Resolução: A função f é claramente contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (é obtida a partir de funções contínuas por operações elementares). Assim, basta estudar f na origem.

Dado que $|\operatorname{sen}(z)| \leq 1,\ \forall z \in \mathbb{R}$, teremos

$$\left|(x+y)^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| = |(x+y)^3| \cdot \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq |x+y|^3,$$

e, portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Assim, por definição, f é contínua na origem.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Resolução: Por definição

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{|h|}\right) = 0 \end{aligned}$$

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável.

   (a) Supondo que a derivada de f no ponto $(2, 4)$ na direcção do vector $(1, 1)$ é 5, e na direcção do vector $(-1, 2)$ é 4, mostre que $\nabla f(2, 4) = (2, 3)$.

   Resolução: Denotemos $\nabla f(2, 4) = (a, b)$ e vejamos que $a = 2$ e $b = 3$. Dado que f é diferenciável temos

$$\begin{aligned} D_{(1,1)} f(2,4) &= (a, b) \cdot (1, 1) = 5 \\ D_{(-1,2)} f(2,4) &= (a, b) \cdot (-1, 2) = 4, \end{aligned}$$

   ou seja,

$$\begin{aligned} a + b &= 5 \\ -a + 2b &= 4 \end{aligned}$$

   e, portanto, $a = 2$; $b = 3$.

   (b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função $g(t) = f(t, t^2)$. Justifique que g é diferenciável e determine $g'(2)$.

   Resolução: A função g é a composição de f e $h(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Dado que f e h são diferenciáveis, g é também diferenciável pelo teorema da função composta. Além disso, deste teorema segue-se que

$$g^{'}(t) = \nabla f(t, t^2) \cdot (1, 2t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   Da alínea anterior, sabemos que $\nabla f(2, 4) = (2, 3)$ e, portanto

$$g^{'}(2) = \nabla f(2, 4) \cdot (1, 4) = (2, 3) \cdot (1, 4) = 14.$$

3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f(x, y) = x^2 e^{-x^2} - y^2$.

   Resolução: Os pontos de estacionaridade de f são aqueles em que o gradiente de f é nulo, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x(1 - x^2)\, e^{-x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y = 0.$$

   Assim, temos

$$\begin{aligned} 2x(1-x^2)\,e^{-x^2} &= 0 \\ -2y &= 0, \end{aligned}$$

donde se conclui que os pontos são $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$.

Para classificar os pontos de estacionaridade, calculamos a matriz Hessiana de f num ponto genérico

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2e^{-x^2}(1-4x^2+2x^4) & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Classificação do ponto $(0,0)$. Neste caso temos

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Logo $(0,0)$ é um ponto de sela de f (dado que os valores próprios de $H_f(0,0)$ têm sinal oposto).

(b) Classificação do ponto $(1,0)$.

$$H_f(1,0) = \begin{bmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Logo $(1,0)$ é um ponto de máximo local para f (dado que os valores próprios de $H_f(1,0)$ são negativos).

(c) Classificação do ponto $(-1,0)$.

$$H_f(-1,0) = \begin{bmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

então $(-1,0)$ é também um ponto de máximo local para f.

4. (a) Mostre que a equação $y + y^3 = x^2 + 2xz + 2z^2$ define localmente y como função de x e z (isto é $y = f(x,z)$) numa vizinhança do ponto $(0,0,0)$, onde f é uma função de classe C^1.

Resolução: Aplicamos o teorema da função implícita à função

$$F(x,y,z) = y + y^3 - x^2 - 2xz - 2z^2.$$

Temos que $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $F(0,0,0) = 0$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)|_{(0,0,0)} = [1 + y^3]|_{(0,0,0)} = 1 \neq 0.$$

Logo existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^3$ de $(0,0,0)$, uma vizinhança U de $(0,0)$ e uma função $f \in C^1(U)$ tal que

$$\{(x,y,z) \in V : \ F(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in R^3 : \ f(x,z) = y, \ (x,z) \in U\}.$$

(b) Calcule a derivada de f no ponto $(0,0)$.
Resolução: Dado que em cada ponto $(x,z) \in U$

$$F(x, f(x,z), z) = 0$$

ou, equivalentemente

$$f(x,z) + f(x,z)^3 - x^2 - 2xz - 2z^2 = 0,$$

derivando em relação a x e a z, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,z) + 3f(x,z)^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,z) - 2x - 2z = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,z) + 3f(x,z)^2\frac{\partial f}{\partial z}(x,z) - 2x - 4z = 0$$

Sendo $f(0,0) = 0$ concluímos que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0) = 0$.

(c) Prove que f possui um mínimo local no ponto $(0,0)$.
Resolução: Calculemos a matriz Hessiana de f no ponto $(0,0)$. Para tal voltamos a derivar o sistema obtido acima. Assim para cada ponto $(x,z) \in U$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,z) + 6f(x,z)^2\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,z)\right]^2 + 3f(x,z)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,z) - 2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,z) + 6f(x,z)^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,z)\frac{\partial f}{\partial z}(x,z) + 3f(x,z)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,z) - 2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,z) + 6f(x,z)^2\left[\frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\right]^2 + 3f(x,z)^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,z) - 4 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,z) + 6f(x,z)^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,z)\frac{\partial f}{\partial z}(x,z) + 3f(x,z)^2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,z) - 2 = 0$$

Dado que $f(0,0) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0) = 0$, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0),\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4.$$

Assim

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios de $H_f(0,0)$ são $\lambda_1 = 3 + \sqrt{5}$ e $\lambda_2 = 3 - \sqrt{5}$, e como ambos são positivos, $(0,0)$ é um ponto de mínimo local.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável tal que $\nabla f(x,y) = 0$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é constante.

   Resolução: Bastará provar que $f(p) = f(q)$ para quaisquer $p, q \in \mathbb{R}^2$.

   Dados $p, q \in \mathbb{R}^2$, pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in \,]p,\, q[$ (segmento de recta que une p e q) tal que
$$f(q) - f(p) = \nabla f(c) \cdot (q - p).$$

   Sendo, por hipótese $\nabla f(c) = 0$, teremos $f(p) = f(q)$.