

Cálculo Diferencial e Integral II
Teste 1 - 5 de Novembro de 2011 - 12h - Versão 1
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

- (2 val.) 1. Calcule ou mostre que não existe o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + 6y^2}.$$

Resolução:

Dado que $\left| \frac{xy^2}{x^2+6y^2} \right| \leq \frac{|x|y^2}{6y^2} = \frac{|x|}{6}$, então, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+6y^2} = 0$.

- (2 val.) 2. Seja $g(x, y) = \begin{cases} \frac{Kx^3 + y^4}{2x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Determine K de modo que $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 5$.

Resolução:

Notando que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t, 0) - g(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Kt^3}{2t^3} = \frac{K}{2},$$

então $K = 10$.

- (2 val.) 3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $Df(1, 1) = [3 \ 1]$. Calcule a derivada parcial $\frac{\partial h}{\partial x}(0, 0)$, sabendo que

$$h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)), \quad u(x, y) = e^{-x}, \quad v(x, y) = e^y.$$

Resolução:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial u}(1, 1) \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial v}(1, 1) \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = -3.$$

- (3 val.) 4. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) = 12y + 6y^2 - 2x^2 + x^4.$$

Resolução:

Das equações

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = -4x + 4x^3 = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} = 12 + 12y = 0 \end{cases}$$

concluimos que os pontos críticos de h são $(0, -1), (-1, -1), (1, -1)$.

Para os classificar recorreremos à matriz hessiana

$$H_h(x, y) = \begin{bmatrix} -4 + 12x^2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

e facilmente se conclui que $(0, -1)$ não é um ponto de extremo de h e que os pontos $(-1, -1), (1, -1)$ são pontos de mínimo de h .

5. Considere o conjunto

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{x+y} + \text{sen}(x)\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que L é uma variedade e indique a sua dimensão.

Resolução:

L é uma variedade-2 por ser o gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 e definida por $f(x, y) = e^{x+y} + \text{sen}(x)$.

Alternativamente, L é uma variedade-2 por ser o conjunto de nível zero da função $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , definida por $F(x, y, z) = z - e^{x+y} - \text{sen}(x)$ e cuja derivada

$$DF(x, y, z) = [-e^{x+y} - \cos(x) \quad -e^{x+y} \quad 1]$$

apresenta característica igual a um em todos os pontos de L .

(2 val.) (b) Determine a equação do plano tangente a L no ponto $(0, 0, 1)$.

Resolução:

No ponto $(0, 0, 1)$ o espaço normal é gerado pelo vector $DF(0, 0, 1) = (-2, -1, 1)$ e, portanto, o plano tangente será dado por

$$(x, y, z - 1) \cdot (-2, -1, 1) = 0 \Leftrightarrow z - y - 2x = 1.$$

(2 val.) (c) Mostre que L é o gráfico de uma função $x = f(y, z)$ numa vizinhança do ponto $(0, 0, 1)$ e calcule $Df(0, 1)$.

Resolução:

Sendo $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0, 1) = -2 \neq 0$, pelo Teorema da Função Implícita L é o gráfico referido e temos

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

e, portanto, $Df(0, 1) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(2 val.) 6. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto definido pelas equações

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + z = 2. \end{cases}$$

Determine o ponto de M que apresenta a maior coordenada x .

Resolução:

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, temos

$$\begin{cases} 1 = -2\lambda x + \mu \\ 0 = -2\lambda y \\ 0 = \lambda + \mu \\ z = x^2 + y^2 \\ x + z = 2. \end{cases}$$

Da segunda equação obtemos $y = 0$ ou $\lambda = 0$. No caso em que $\lambda = 0$, da terceira e da primeira equações concluímos que $\mu = 0$ e $\mu = 1$. Assim, devemos ter apenas $y = 0$. Da quarta e quinta equações temos $z = x^2$ e $x + z = 2$, ou seja, $x^2 + x - 2 = 0$ e $z = x^2$. Portanto, os pontos candidatos são $(-2, 0, 4)$ e $(1, 0, 1)$. É claro que o ponto pretendido é $(1, 0, 1)$.

(3 val.) 7. Seja $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e tal que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Supondo que $u = 0$ na fronteira do disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, mostre que $u = 0$ em D .

Resolução:

Para obter a classificação máxima (3 val.):

A função u tem máximo e mínimo absolutos em \overline{D} porque este conjunto é compacto.

Note-se que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ é o traço da matriz hessiana de u , ou seja, é a soma dos respectivos valores próprios.

Supondo que o determinante da matriz hessiana não é nulo, então os respectivos valores próprios são simétricos. Assim, a função u não tem pontos de extremo relativo em D .

Portanto os extremos de u deverão estar na fronteira do disco. Dado que na fronteira a função u é nula, concluímos que $u = 0$ em D .