

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 2

TESTE 1A - 24 DE ABRIL DE 2010 - DAS 9H ÀS 10:30H

### Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Estude a continuidade de  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ .  
(b) Determine a direcção em que  $f$  cresce mais rapidamente no ponto  $(1, 1)$ .  
(c) Sendo  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função diferenciável com  $g(1, 0, 2) = (1, 1)$  e

$$Dg(1, 0, 2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

calcule  $D(f \circ g)(1, 0, 2)$ .

#### Resolução:

- (a) As funções  $x$  e  $x^2 + y^2$  são contínuas uma vez que são polinómios. Como a raiz quadrada é contínua e o quociente de funções contínuas é contínua nos pontos onde o denominador não se anula conclui-se que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = -1$$

vemos que não existe o limite de  $f(x, y)$  quando  $(x, y)$  tende para zero, e portanto  $f$  não é contínua em  $(0, 0)$ .

- (b) A direcção de maior crescimento é dada pelo gradiente da função no ponto. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e portanto a direcção pretendida é a do vector

$$\nabla f(1, 1) = \left( \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right).$$

- (c) A função  $f$  é diferenciável no ponto  $(1, 1)$  (uma vez que é o quociente de um polinómio pela composta da raiz quadrada com um polinómio e o denominador não se anula), logo, pela regra de derivação da função composta temos

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(1, 0, 2) &= Df(1, 1)Dg(1, 0, 2) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $f = f(u, v)$  de classe  $C^2$  tal que  $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(-1, 0) = 3$  e  $\frac{\partial f}{\partial v}(-1, 0) = 2$ . Sendo  $h$  a função definida por  $h(x, y) = f(x^2 - y, xy)$ , calcule  $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0, 1)$ .

**Resolução:** Pela regra da cadeia temos,

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(x^2 - y, xy)(-1) + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2 - y, xy)x$$

e aplicando novamente a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) &= -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x^2 - y, xy)(2x) - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(x^2 - y, xy)y \\ &+ \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(x^2 - y, xy)(2x) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x^2 - y, xy)y \right) x + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2 - y, xy). \end{aligned}$$

Substituindo  $(x, y) = (0, 1)$  temos

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0, 1) = -\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(-1, 0) + \frac{\partial f}{\partial v}(-1, 0) = -3 + 2 = -1$$

onde na segunda igualdade usamos o Lema de Schwarz (que se pode aplicar porque  $f$  é de classe  $C^2$ ) para ver que  $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(-1, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(-1, 0) = 3$ .

3. Mostre que o sistema de equações

$$x + y^3 - z^4 = 2 \quad \text{e} \quad z^2 + xz + xy = 5.$$

define  $y$  e  $z$  como funções de  $x$  numa vizinhança do ponto  $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ . Calcule  $\frac{dy}{dx}(2)$ .

**Resolução:** A função  $F(x, y, z) = (x + y^3 - z^4 - 2, z^2 + xz + xy - 5)$  é de classe  $C^1$  uma vez que as suas componentes são polinómios. Temos  $F(2, 1, 1) = (0, 0)$  logo  $(2, 1, 1)$  é uma solução do sistema. Sendo

$$\frac{\partial F}{\partial (y, z)} = \begin{bmatrix} 3y^2 & -4z^3 \\ x & 2z + x \end{bmatrix},$$

temos

$$\det \frac{\partial F}{\partial (y, z)}(2, 1, 1) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 \neq 0.$$

O Teorema da função implícita garante então a existência de uma vizinhança do ponto  $(2, 1, 1)$  em que o sistema define  $y$  e  $z$  como funções de  $x$ .

Derivando as equações em ordem a  $x$  obtemos o sistema

$$\begin{cases} 1 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 4z^3 \frac{dz}{dx} = 0 \\ 2z \frac{dz}{dx} + z + y + x \left( \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} \right) = 0 \end{cases}$$

Substituindo em  $x = 2, y = 1, z = 1$  temos

$$\begin{cases} 1 + 3 \frac{dy}{dx}(2) - 4 \frac{dz}{dx}(2) = 0 \\ 2 \frac{dz}{dx}(2) + 2 + 2 \left( \frac{dz}{dx}(2) + \frac{dy}{dx}(2) \right) = 0 \end{cases}$$

Somando as equações e resolvendo em ordem a  $\frac{dy}{dx}$  obtemos  $\frac{dy}{dx}(2) = -\frac{3}{5}$ .

4. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = 3x^2 y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 12.$$

**Resolução:** Os pontos de estacionaridade são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6xy - 6x = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 1 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0. \end{cases}$$

Este sistema tem por soluções os pontos  $(x, y) = (0, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(-1, 1)$  e  $(1, 1)$ . A matriz Hessiana de  $f$  é

$$H(f)(x, y) = \begin{bmatrix} 6y - 6 & 6x \\ 6x & 6y - 6 \end{bmatrix}$$

e portanto  $H(f)(0, 0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$  donde se vê que  $(0, 0)$  é um ponto de máximo;

$H(f)(0, 2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$  logo  $(0, 2)$  é um ponto de mínimo;  $H(f)(-1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$

tem determinante negativo logo  $(-1, 1)$  é um ponto de sela;  $H(f)(1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$  tem determinante negativo donde se conclui que  $(1, 1)$  é um ponto de sela.

5. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y > 0, z = \ln(x + 3y)\}.$$

- Mostre que  $M$  é uma variedade e indique a sua dimensão.
- Determine o espaço tangente e o espaço normal a  $M$  no ponto  $(4, -1, 0)$ .
- Determine uma equação cartesiana do plano tangente a  $M$  em  $(4, -1, 0)$ .

**Resolução:**

- $M$  é o gráfico da função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \ln(x + 3y)$  onde  $U$  é o aberto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y > 0\}$ . Como  $f$  é de classe  $C^1$  (é a composta da função logaritmo com um polinómio), conclui-se que  $M$  é uma variedade de dimensão 2.
- A variedade  $M$  é o conjunto de nível 0 da função  $z - \ln(x + 3y)$  logo o seu espaço normal é gerado pelo vector  $\nabla(z - \ln(x + 3y)) = \left(-\frac{1}{x+3y}, -\frac{3}{x+3y}, 1\right)$  no ponto  $(4, -1, 0)$ . Isto é

$$T_{(4, -1, 0)}M^\perp = \{a(-1, -3, 1) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}.$$

O espaço tangente nesse ponto é o complemento ortogonal do espaço anterior e portanto é definido pela equação  $(-1, -3, 1) \cdot (a, b, c) = 0 \Leftrightarrow a = -3b + c$ , ou seja,

$$T_{(4, -1, 0)}M = \{(-3b + c, b, c) \in \mathbb{R}^3 : b, c \in \mathbb{R}\}.$$

- Uma vez que  $(-1, -3, 1)$  é um vector perpendicular ao plano tangente e este passa pelo ponto  $(4, -1, 0)$ , temos que a equação cartesiana do plano tangente é

$$-(x - 4) - 3(y + 1) + z = 0 \Leftrightarrow -x + 3y + z = -1.$$

6. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^\infty$  cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a 2 se anulam em  $(0, 0)$ . Mostre que se alguma das terceiras derivadas parciais de  $f$  em  $(0, 0)$  não é nula então  $(0, 0)$  é um ponto de sela de  $f$ .

**Resolução:** As derivadas parciais em ordem a  $x$  são as derivadas da função  $x \mapsto f(x, 0)$ . Se  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0$  temos que a primeira e segunda derivadas desta função se anulam em 0 e que a terceira não se anula. Conclui-se que  $f(x, 0)$  tem um ponto de inflexão em  $x = 0$  e consequentemente  $f$  tem um ponto de sela em  $(0, 0)$ . Da mesma forma vemos que se  $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0) \neq 0$ , a origem é um ponto de sela.

Suponhamos então que  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0) = 0$ . Seja  $g(t) = f(t, t)$ . Usando a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned} g'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \\ g''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0 \\ g'''(0) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0, 0) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0) \\ &= 3 \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0, 0) \right). \end{aligned}$$

Concluimos que se  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0, 0) \neq 0$ , a função  $g(t)$  tem um ponto de inflexão em 0 e portanto  $(0, 0)$  é um ponto de sela de  $f$ . Assim, se uma das duas derivadas parciais mistas de terceira ordem for não nula, haverá um ponto de sela a não ser que a outra tenha o valor simétrico.

Mas repetindo o argumento anterior para a função  $h(t) = f(t, 2t)$  vemos que, nesse caso  $h'''(0) = 2\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) + 4\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0, 0) = 2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0, 0) \neq 0$  pelo que  $(0, 0)$  é necessariamente um ponto de sela a não ser que todas as derivadas parciais de ordem 3 de  $f$  se anulem.