Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC
Teste 2 - 15 de Junho de 2009 - 09h - Versão 1
Duração: 90 minutos

Resolução abreviada

(2 val.) 1. (a) Mostre que a região

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1\},$$

é uma variedade e determine a sua dimensão.

Resolução: M é o conjunto de nível zero da função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1$. A respectiva derivada $\nabla F = (\frac{x}{2}, 2y, 2z)$, tem característica um em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$, excepto na origem, $(0,0,0)$. Como a origem não pertence a M, porque $F(0,0,0) = -1 \neq 0$, concluímos que M é uma variedade e que $\dim(M) = 3 - 1 = 2$.

(2 val.) (b) Determine um vector tangente (não nulo) a M no ponto $(1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Resolução: Dado que $\nabla F(1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (\frac{1}{2}, 1, \sqrt{2})$, os vectores tangentes a M no ponto $(1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ são então dados pelas soluções da equação

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (\frac{1}{2}, 1, \sqrt{2})) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_1 + u_2 + \sqrt{2}u_3 = 0.$$

Um vector tangente não nulo é, por exemplo, $u = (-2, 1, 0)$.

(2 val.) (c) Determine, caso existam, os extremos da função $f(x,y,z) = x + y$ na variedade M.

Resolução: A variedade M é um conjunto compacto e a função f é contínua pelo que, do teorema de Weierstrass, concluímos que f tem (pelo menos) um máximo e um mínimo absolutos em M. Sendo f de classe C^1 os extremos de f em M, (extremos condicionados) são soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla F \\ F(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda \frac{x}{2} \\ 1 = \lambda 2y \\ 0 = \lambda 2z \\ \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Da terceira equação, temos $\lambda = 0$ ou $z = 0$. Mas fazendo $\lambda = 0$, da primeira equação obtemos $1 = 0$. Assim, temos $z = 0$ e, das primeiras duas equações, obtemos $x = 4y$.

Assim, teremos,

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 4y \\ \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

As soluções deste sistema correspondem só a dois pontos,

$$P_1 = (\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0) \ ; \quad P_2 = (-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0),$$

pelo que um é o máximo e outro é o mínimo de f em M.

Como $f(P_2) = -\sqrt{5} < f(P_1) = \sqrt{5}$, então P_1 é o máximo e P_2 é o mínimo.

2. Seja

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - 3(x^2 + y^2)}, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de D na forma $\int \left(\int \left(\int \ldots dx\right) dy\right) dz$

Resolução: Temos que $0 \leq z \leq 2$. Os cortes de D com os planos $z = const$ são dados por

$$\begin{aligned} A_z &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq z^2, x \geq 0, y \geq 0\right\}, \quad \text{se } 0 \leq z \leq 1 \\ A_z &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq \frac{4 - z^2}{3}, x \geq 0, y \geq 0\right\}, \quad \text{se } 1 \leq z \leq 2. \end{aligned}$$

Temos então

$$V_D = \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{z^2 - y^2}} dx\right) dy\right) dz + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{\frac{4 - z^2}{3}}} \left(\int_0^{\sqrt{\frac{4 - z^2}{3} - y^2}} dx\right) dy\right) dz.$$

(2 val.) (b) Calcule a massa de D, supondo que a densidade de massa é $\sigma(x, y, z) = z$.

Resolução: Em coordenadas cilíndricas temos

$$\begin{aligned} M_D &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_\rho^{\sqrt{4 - 3\rho^2}} z \ \rho \ dz d\rho d\theta = \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 (\rho(4 - 3\rho^2) - \rho^3) \ d\rho = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

3. Considere os seguintes campos vectoriais: $H(x,y) = (4xe^{x^2+3y}, 6e^{x^2+3y})$ e $G(x,y) = \left(\frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}, \frac{-(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right)$ e seja C o quadrado com vértices $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$, percorrido no sentido horário.

(1 val.) (a) Calcule $\oint_C H \cdot dg$.

Resolução: O campo é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Uma vez que

$$\frac{\partial H_1}{\partial y} = 12x\ e^{x^2+3y} = \frac{\partial H_2}{\partial x},$$

concluímos que H é um campo fechado e, portanto, pode ser um campo gradiente, ou seja, pode existir um campo escalar ϕ tal que $H = \nabla\phi$.

De facto, das equações

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 4xe^{x^2+3y} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 6e^{x^2+3y}, \end{cases}$$

facilmente se conclui que $\phi(x,y) = 2e^{x^2+3y}$.

O integral de um campo gradiente em qualquer curva fechada é zero pelo que $\oint_C H \cdot dg = 0$.

(1 val.) (b) Calcule $\oint_C G \cdot dg$.

Resolução: Note-se que G é um exemplo de campo fechado mas não gradiente no seu domínio, $D_G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$.

Aplicando o teorema de Green ao campo G no domínio limitado pela circunferência

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\},$$

e pelo quadrado C, concluímos que

$$\oint_C G \cdot dg = \oint_\Gamma G \cdot dg.$$

Uma parametrização de Γ é

$$g(s) = (1 + \cos(s), 1 - \operatorname{sen}(s)),\ \ s \in [0, 2\pi],$$

pelo que,

$$\oint_C G \cdot dg = \oint_\Gamma G \cdot dg = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}(s), -\cos(s)) \cdot (-\operatorname{sen}(s), -\cos(s)) ds = 2\pi.$$

4. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 + (x^2 + y^2)^2, z < 2\},$$

orientada com normal unitária, n_S, com terceira componente positiva.

(3 val.) (a) Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (e^{y^2}, e^{x^2+3z}, 2)$ através de S.

Resolução Calculemos o fluxo pelo teorema da divergência. Consideremos a região

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 + (x^2 + y^2)^2 < z < 2 \ \right\},$$

para a qual $\partial D = S \cup T$, onde a "tampa" T é dada por

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 2, x^2 + y^2 \leq 1 \ \right\}.$$

Uma vez que $div(F) = 0$ obtemos, do teorema da divergência,

$$\iint_S F \cdot n_S \ = \ \iint_T F \cdot n_T = \iint_T 2 = \ 2\pi.$$

(2 val.) (b) Calcule, usando o teorema de Stokes, o trabalho do campo $G = (y, 0, 0)$ pela fronteira (bordo) ∂S de S, percorrida no sentido induzido por n_S.

Resolução: Observemos primeiro que o bordo de S coincide com o bordo de T,

$$\partial S = \partial T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1, z = 2\right\}$$

orientado no sentido anti-horário para um observador no ponto $(0, 0, 1)$. Esta orientação corresponde à normal unitária em T, usada na alínea anterior, $n_T = (0, 0, 1)$. Uma vez que $rot(G) = (0, 0, -1)$, obtemos

$$\oint_{\partial S} G \cdot dg = \oint_{\partial T} G \cdot dg = \iint_T rot(G) \cdot n_T = \iint_T -1 = \ -\pi.$$

(3 val.) 5. Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto regular e $\varphi, \psi \ : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$. Mostre, usando o teorema da divergência, a seguinte identidade

$$\iiint_D (\varphi \ \triangle\psi - \psi \ \triangle\varphi) \ dxdydz = \iint_{\partial D} (\varphi \ \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \ \frac{\partial\varphi}{\partial n}),$$

onde n é a normal unitária exterior de ∂D e $\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Resolução: Da identidade $\varphi\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}$ e de identidades análogas para y e z concluímos que $\varphi\triangle\psi = div(\varphi grad\ \psi) - grad\varphi\cdot grad\psi$ e portanto

$$\varphi\triangle\psi - \psi\triangle\varphi = div\left(\varphi grad\ \psi - \psi grad\ \varphi\right).$$

Então

$$\begin{aligned}\iiint_D (\varphi\ \triangle\psi - \psi\ \triangle\varphi)\ dxdydz &= \iiint_D div\left(\varphi grad\ \psi - \psi grad\ \varphi\right)\ dxdydz = \\ &= \iint_{\partial D} (\varphi grad\ \psi - \psi grad\ \varphi)\cdot\ n = \\ &= \iint_{\partial D} (\varphi\ \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}).\end{aligned}$$