Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Cursos: LEBIOL, LEBiom, LEIC-A, LEMat, LEQ, LEAmb, LEGM, LEC
Exame Recurso - 18 de Julho de 2022 - 10h30
Duração: 2 horas

Resolução abreviada

1. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+3y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) (a) Determine se h é contínua em $(0,0)$.

Resolução:
Tendo em conta que

$$\big|h(x,y)\big| \leq y^2 \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq y^2 \leq \|(x,y)\|^2$$

conclui-se que f é contínua na origem.

(2 val.) (b) Calcule, se existir, a derivada de h segundo o vector $\mathbf{v} = (1,1)$ na origem.

Resolução:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h\big((0,0)+t(1,1)\big) - h(0,0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{h(t,t)-h(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+3t^2}} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{2} = 0. \end{aligned}$$

Outra resolução:
Sendo $\frac{h(x,0)-h(0,0)}{x} = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, então $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = 0$; temos ainda

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{h(0,y)-h(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|}{\sqrt{3}} = 0,$$

pelo que $\nabla h(0,0) = (0,0)$. Por outro lado

$$\frac{|h(x,y) - h(0,0) - \nabla h(0,0)\cdot(x,y)|}{\|(x,y)\|} \leq |y| \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |y| \to 0$$

quando $(x, y) \to (0, 0)$. Sendo assim, f é diferenciável na origem e

$$\frac{\partial h}{\partial v}(0,0) = \nabla h(0,0) \cdot (1,1) = 0.$$

(2 val.) 2. Considere as funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x, y) = (2x + y - xy, x - y + xy) \quad \text{e} \quad g(u, v) = (u - v)e^{u^2+v^2}.$$

Calcule $D(g \circ f)(1, 1)$.

Resolução: Como f e h são funções de classe C^1, usando a regra da derivação composta obtemos

$$D(g \circ f)(1,1) = Dg(f(1,1))\, Df(1,1) = Dg(2,1)\, Df(1,1),$$

pois $f(1, 1) = (2, 1)$. Mais ainda,

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} 2-y & 1-x \\ 1+y & -1+x \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Df(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$Dg(u,v) = e^{u^2+v^2} \begin{bmatrix} 1 + 2u(u-v) & -1 + 2v(u-v) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Dg(2,1) = e^5 \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma

$$D(g \circ f)(1,1) = e^5 \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7e^5 & 0 \end{bmatrix}$$

(2 val.) 3. Considere o conjunto $C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = y^2 - x^2\right\}$. Justifique que existem o máximo e o mínimo da distância dos pontos de C ao eixo Oz. Determine os seus valores bem como os respectivos pontos de extremo.

Resolução: Consideremos a função quadrado da distância de (x, y, z) ao eixo Oz, que é $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Note que as as condições

$$F_1(x,y,z) = y^2 - x^2 - z = 0 \qquad \text{e} \qquad F_2(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

definem a interesecção de duas superfícies, sendo que, para qualquer $(x, y) \in C$, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 2$ e $|z| \leq |y^2 - x^2| \leq |y|^2 + |x|^2 \leq 5$. Como C também é fechado (basta ver que o limite de qualquer sucessão convergente $u_n \in C$ pertence a C) então C é compacto; e como f é contínua, pelo teorema de Weierstrass f tem máximo e mínimo em C. Para calcular os valores destes extremos, utilizamos o método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda_1 \nabla F_1 + \lambda_2 \nabla F_2 \\ F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (2x, 2y, 0) = \lambda_1(-2x, 2y, -1) + \lambda_2(2x, \frac{y}{2}, 0) \\ z = y^2 - x^2 \\ x^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-\lambda_2) = 0 \\ \frac{y}{4}(4-\lambda_2) = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ z = y^2 - x^2 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ \lambda_2 = 4 \\ — \\ z = 4 \\ y = \pm 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ y = 0 \\ — \\ z = -1 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Como $f(\pm 1, 0, -1) = 1$ e $f(0, \pm 2, 4) = 4$, então o mínimo do quadrado da distância de $(x, y, z) \in C$ a Oz é 1 e ocorre nos pontos $(\pm 1, 0, -1)$.

O máximo do quadrado da distância de $(x, y, z) \in C$ a Oz é 4 e ocorre nos pontos $(0, \pm 2, 4)$.

4. Seja

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3 - \sqrt{x^2 + y^2},\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V usando integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)\, dy)\, dz$.

Resolução: A fronteira do sólido V é a união de duas superfícies cónicas; em coordenadas cilíndricas

$$g(\rho, \theta, z) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, z), \tag{1}$$

$2\rho \leq z \leq 3 - \rho$, $0 \leq \rho \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. A interesecção das duas superfícies está contida na circunferência $2\rho = 3 - \rho \Leftrightarrow \rho = 1$ e $z = 2$. Assim sendo, o volume de V é:

$$\int_0^2 \Big(\int_0^{\frac{z}{2}} \Big(\int_0^{\sqrt{\frac{z^2}{4} - y^2}} dx \Big) dy \Big) dz + \int_2^3 \Big(\int_0^{3-z} \Big(\int_0^{\sqrt{(3-z)^2 - y^2}} dx \Big) dy \Big) dz.$$

(3 val.) (b) Calcule o volume de V usando uma transformação de coordenadas apropriada.

Resolução: Utilizamos a transformação em coordenadas cilíndricas (1), sendo $g(\overline{T}) = V$ com

$$T = \big\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \rho < 1, 2\rho < z < 3 - \rho\big\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_3(V) &= \iiint_T \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^1 \Big(\int_{2\rho}^{3-\rho} \rho dz \Big) d\rho \Big) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \int_0^1 (3\rho - 3\rho^2) d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

5. Considere o campo vectorial $F(x, y) = \big(2\cos y + 3y\cos x + y,\ 3\,\mathrm{sen}\, x - 2x\,\mathrm{sen}\, y - x\big)$.

(2 val.) Calcule

$$\oint_{\partial D} F \cdot dg$$

onde ∂D é a fronteira do conjunto $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < x < 1\big\}$ percorrida uma vez no sentido horário.

Resolução: Note que F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Usando a notação

$$F(x, y) = \big(\underbrace{2\cos y + 3y\cos x + y}_{=P(x,y)}, \underbrace{3\,\mathrm{sen}\, x - 2x\,\mathrm{sen}\, y - x}_{=Q(x,y)}\big),$$

temos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2.$$

Pelo teorema de Green, e tendo em conta que a curva é percorrida no sentido negativo:

$$\oint_{\partial D} F \cdot dg = -\iint_D (-2) \, dy \, dx = 2 \int_{-1}^1 \Big(\int_{y^2}^1 dx \Big) dy = 2 \int_{-1}^1 (1 - y^2) dy = \frac{8}{3}.$$

(2 val.) 6. Seja $H(x, y) = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$. Seja $W(a, b)$ o trabalho realizado por H ao longo da elipse de semi-eixos $a, b > 0$ percorrida uma vez no sentido anti-horário. Mostre que

$$\frac{\partial W}{\partial a}(a, a) + \frac{\partial W}{\partial b}(a, a) = 2\pi.$$

Resolução: Uma parametrização da elipse percorrida no sentido positivo é

$$g(t) = \big(a\cos t, b\,\mathrm{sen}\, t\big), \quad \text{com } t \in [0, 2\pi].$$

Desta forma, e com $f(a,b,t) = \big(a^2\cos^2 t + b^2\,\mathrm{sen}^2\, t\big)^{-\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} W(a,b) &= \int_{g([a,b])} H \cdot dg = \int_0^{2\pi} f(a,b,t)\big(-b\,\mathrm{sen}\, t, a\cos t\big)\cdot\big(-a\,\mathrm{sen}\, t, b\cos t\big)\,dt \\ &= ab\int_0^{2\pi} f(a,b,t)\,dt. \end{aligned}$$

Fixando $a = \bar{a} > 0$, para (a,b) numa vizinhança de $(\bar{a},\bar{a})$ e qualquer $t \in]0, 2\pi[$, f é de classe C^1. Pela regra de Leibniz:

$$\frac{\partial W}{\partial a} + \frac{\partial W}{\partial b} = (a+b)\int_0^{2\pi} f(a,b,t)\,dt - ab\int_0^{2\pi}\big(a\cos^2 t + b\,\mathrm{sen}^2\, t\big) f^3(a,b,t)\,dt.$$

Tendo em conta que $f(a,a,t)$ é constante e igual a $\frac{1}{a}$:

$$\frac{\partial W}{\partial a}(a,a) + \frac{\partial W}{\partial b}(a,a) = 2a\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a} - a^2\int_0^{2\pi} a\,\frac{dt}{a^3} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

(3 val.) 7. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um disco aberto e $f : D \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e tal que $\forall x \in D$ a hessiana $H_f(x)$ é definida positiva. Mostre que f não pode ter mais do que um ponto crítico em D. (Sugestão: se $a, b \in D$ forem pontos críticos distintos de f, estude o comportamento de ∇f ao longo do segmento que liga a a b.)

Resolução: Admitindo que existem $a, b \in D$, $a \neq b$, tais que $\nabla f(a) = \nabla f(b) = 0$. Considere-se a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \nabla f\big(a + t(b-a)\big)\cdot(b-a),$$

que está bem definida porque o segmento de recta $[a,b]$ está incluído em D para quaisquer $a, b \in D$. Além disso, g é de classe C^1 num intervalo aberto contendo $[0,1]$ e $g(0) = g(1) = 0$. Pelo teorema de Rolle (e usando também o teorema da derivada da função composta) existe $\theta \in]0,1[$ tal que

$$g'(\theta) = D(\nabla f)(a+t(b-a))\,D(a+t(b-a))\Big|_{t=\theta}\cdot(b-a) = (b-a)^T H_f(c)(b-a) = 0,$$

em que $c = a + \theta(b-a) \in D$.

Mas como $a \neq b$, então $H_f(c)$ não é definida positiva, o que contradiz a hipótese.