Volumes de paralelepípedos

1 Revisão sobre espaços Euclidianos

Recorde que um *espaço Euclidiano (real)* V de dimensão d é um espaço vectorial real de dimensão d equipado com um *produto interno*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R} ,$$

ou seja, uma função bilinear, simétrica e definida positiva. Qualquer espaço Euclidiano admite uma *base ortonormal* $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d)$, ou seja uma base tal que

$$\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} ,$$

(por exemplo obtida a partir de qualquer outra base pelo método de ortogonalização de Gram–Schmidt).

Exemplo: O *produto escalar* de $\mathbb{R}^d$, definido por

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{d} a_i b_i ,$$

é um produto interno, para o qual a base canónica $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d)$ é ortonormal. Nestas notas consideraremos sempre que $\mathbb{R}^d$ é um espaço Euclidiano com este produto interno: $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

Seja V um espaço Euclidiano de dimensão d e $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d)$ uma base ortonormal. A função

$$C : V \to \mathbb{R}^d$$

que a cada vector $a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_d\boldsymbol{u}_d$ de V atribui o seu vector de coordenadas

$$C(a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_d\boldsymbol{u}_d) = \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_d)$$

é uma transformação linear bijectiva e é uma *isometria*, ou seja, preserva o produto interno:

$$\left\langle \sum_i a_i \boldsymbol{u}_i, \sum_j b_j \boldsymbol{u}_j \right\rangle = \sum_{i,j} a_i b_j \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle = \sum_i a_i b_i = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \ .$$

Portanto C é uma transformação que preserva todos os comprimentos de vectores (normas) e ângulos entre vectores.

2 Volumes de paralelepípedos

Dados d vectores $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ de $\mathbb{R}^n$, com $d \leq n$, o *d-paralelepípedo* gerado por estes vectores é o conjunto

$$P = \{t_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_d \boldsymbol{v}_d : t_1, \ldots, t_d \in [0,1]\} \ .$$

Seja $D = [\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_d]$ a matriz $n \times d$ cuja coluna j é, para cada $j = 1, \ldots, d$, o vector $\boldsymbol{v}_j$. No caso de se ter $d = n$ a matriz é quadrada e sabemos que o *d-volume* de P é

$$V_d(P) = |\det D| \ .$$

No entanto, se $d < n$, a matriz D não é quadrada e por isso esta fórmula não faz sentido.

A fim de encontrar uma fórmula para o d-volume de P quando $d < n$, seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vectorial de dimensão d que contém os vectores $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ (se os vectores forem linearmente independentes então V é a expansão linear deste conjunto de vectores, ou seja, é o espaço das colunas de D — caso contrário há vários espaços V possíveis). O espaço V, munido do produto escalar de $\mathbb{R}^n$, é também um espaço Euclidiano e por isso existe uma isometria

$$C : V \to \mathbb{R}^d \ .$$

Seja $S = [C\boldsymbol{v}_1 \cdots C\boldsymbol{v}_d]$ a matriz quadrada $d \times d$ cuja linha j é, para cada $j = 1, \ldots, d$, o vector $C\boldsymbol{v}_j$. O paralelepípedo gerado pelos d vectores $C\boldsymbol{v}_j$ coincide com a imagem CP e, uma vez que C preserva distâncias e ângulos, faz sentido considerar que CP é geometricamente indistinguível de P. Por isso podemos tentar definir o d-volume de P como sendo o d-volume de CP, ou seja:

Definição: $V_d(P) = |\det S|$.

No entanto esta escolha parece depender da escolha da isometria C. Para ver que de facto esta definição não depende da escolha da isometria comecemos por notar o seguinte:

Lema: $D^T D = S^T S$.

Demonstração: Sejam $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}_j$ os i-ésimo e j-ésimo vectores da base canónica de $\mathbb{R}^d$. Então tem-se, pelo facto de C ser uma isometria,

$$\begin{aligned}(D^T D)_{ij} &= \boldsymbol{e}_i^T D^T D\boldsymbol{e}_j = \langle D\boldsymbol{e}_i, D\boldsymbol{e}_j\rangle = \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle \\ &= \langle C\boldsymbol{v}_i, C\boldsymbol{v}_j\rangle = \langle S\boldsymbol{e}_i, S\boldsymbol{e}_j\rangle = \boldsymbol{e}_i^T S^T S\boldsymbol{e}_j = (S^T S)_{ij} \ .\end{aligned}$$

Obtemos assim uma fórmula para o d-volume de P que não depende da escolha da isometria, mas apenas da matriz D:

Teorema: $V_d(P) = \sqrt{\det(D^T D)}$.

Demonstração: Tem-se

$$\begin{aligned}V_d(P) &= |\det S| \\ &= \sqrt{(\det S)(\det S)} = \sqrt{(\det S^T)(\det S)} = \sqrt{\det(S^T S)} \\ &= \sqrt{\det(D^T D)} \ .\end{aligned}$$

Exemplo: Na definição de integral numa variedade diferencial M parametrizada por $\boldsymbol{g} : U \subset \mathbb{R}^d \to M$,

$$\int_M f = \int_U f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}))\sqrt{\det(D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})^T D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}))}\, du_1 \dots du_d \ ,$$

o *factor de escala* $\sqrt{\det(D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})^T D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}))}$ é o d-volume do paralelepípedo $P \subset T_{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})}M$ que é gerado pelas d derivadas parciais de $\boldsymbol{g}$ no ponto $\boldsymbol{u}$.