
Probabilidades e Estatística

Probabilidades, Erros e Estatística

Estatística

1º semestre – 2002/03

Exame de 2ª época / 2º teste

04/02/03 – 9 horas

Duração: 3 horas / 1 hora e 30 minutos

- Se pretende fazer o **exame** deve resolver **todos os grupos**.
 - Se pretende fazer o **2º teste** deve resolver **apenas os grupos III e IV**. Nesse caso as cotações passam a ser o dobro das indicadas.
 - Justifique convenientemente **todas as respostas!**
-

Grupo I

6.5 valores

1. Quando a operação automatizada de enchimento de moldes é efectuada à velocidade normal, a probabilidade de um molde, seleccionado casualmente do fabrico diário, ter sido enchido correctamente é igual a 0.95. Caso se opere a grande velocidade, esta probabilidade será igual a 0.9. Sabe-se também que 80% dos moldes são enchidos à velocidade normal, sendo os restantes enchidos a grande velocidade.
 - (a) Qual a probabilidade de um molde escolhido ao acaso ter sido enchido incorrectamente? (1.5)
 - (b) Uma vez seleccionado um molde enchido incorrectamente, qual a probabilidade de a operação de enchimento ter sido efectuada à velocidade normal? (1.0)
 - (c) O funcionário encarregado pela inspecção de 20 moldes, seleccionados ao acaso de um grande lote, deverá contactar de imediato o responsável pela operação de enchimento, caso detecte pelo menos dois moldes enchidos incorrectamente. Determine a probabilidade de o funcionário efectuar tal contacto. (1.5)
2. Estudos preliminares indicaram que a probabilidade de ser detectada a presença de alto teor de metais pesados numa amostra de solo, proveniente de um certo local, é de 0.01.
 - (a) Obtenha o valor esperado e a variância do número total de amostras seleccionadas ao acaso até que seja detectada a primeira amostra com alto teor de metais pesados. (1.5)
 - (b) Calcule a probabilidade de serem seleccionadas ao acaso quando muito 3 amostras até que seja detectada a primeira com alto teor de metais pesados. (1.0)

Grupo II

3.5 valores

Os números de “kits” de teste vendidos semanalmente por duas sucursais de uma empresa de biotecnologia são duas variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson cujas variâncias são iguais a 10 e 15, respectivamente.

- (a) Obtenha o valor exacto para a probabilidade de o número total de “kits” vendidos semanalmente pelas duas sucursais da empresa exceder 25 unidades. Efectuando a aproximação que entender mais razoável, obtenha um valor aproximado para aquela probabilidade e comente o erro relativo associado a essa aproximação $\left(\text{erro relativo} = \left| \frac{\text{valor exacto} - \text{valor aprox.}}{\text{valor exacto}} \right| \right)$. (2.0)

- (b) Admitindo que as sucursais facturam 200 e 225 euros (respectivamente) por cada “kit” de teste vendido, determine o valor esperado e o desvio-padrão da facturação total semanal das duas sucursais desta empresa. (1.5)

Grupo III

5 valores

Com o objectivo de estudar o volume dos depósitos mensais (em dezenas de milhar de euros) efectuados por pequenas e médias empresas no Banco S. B. Lx, uma gestora recolheu um total de 50 observações que conduziram à média geométrica amostral $m_g = \left(\prod_{i=1}^{50} x_i\right)^{1/50} = 4.2427$.

Admita que a função densidade de probabilidade do volume dos referidos depósitos é, para $\lambda > 0$, dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda 2.5^\lambda}{x^{\lambda+1}}, & x \geq 2.5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

- (a) Deduza a estimativa de máxima verosimilhança de λ e verifique que, para a amostra recolhida, ela é igual a $[\ln(m_g) - \ln(2.5)]^{-1} \approx 1.8907$. (2.0)
- (b) Obtenha a estimativa de máxima verosimilhança da probabilidade de um depósito mensal exceder 35000 euros. (1.0)
- (c) Sabendo que $100\lambda [\ln(M_g) - \ln(2.5)] \sim \chi^2_{(100)}$ é uma variável aleatória fulcral para λ , onde $M_g = \left(\prod_{i=1}^{50} X_i\right)^{1/50}$, deduza um intervalo de confiança a 95% para esse parâmetro. (2.0)

Grupo IV

5 valores

1. Um fabricante de cerveja afirma que a sua marca “Glut-Glut” tem a preferência de 40% dos apreciadores de cerveja. Recolhida uma amostra, constatou-se que 54 de 150 apreciadores preferem tal marca. Teste a afirmação do fabricante ao nível de significância de 4%. (2.0)
2. Um programa de computação deve gerar números pseudo-aleatórios, concretizações de uma variável aleatória X com função de distribuição (3.0)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x - \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases} .$$

Foram gerados e agrupados 200 números pseudo-aleatórios, tendo-se obtido a tabela abaixo.

classe	[0.0,0.4[[0.4,0.8[[0.8,1.2[[1.2,1.6[[1.6,2.0]
frequência	80	66	24	20	10

Poder-se-á afirmar que o programa de computação está a cumprir a sua finalidade? Calcule um intervalo para o valor- p do teste e comente-o.