



## Probabilidades e Estatística (I)

Exame de 2ª Época / 2º Teste  
Duração: 3 horas / 1 hora e 30 minutos

2º semestre – 2003/04  
10/07/2004 – 9 horas

- Se pretende fazer o **exame** deve resolver **todos os grupos**.
- Se pretende fazer o **2º teste** deve resolver **apenas os grupos III e IV**. Nesse caso as cotações passam a ser o dobro das indicadas.
- Justifique convenientemente **todas as respostas!**

### Grupo I

7.0 valores

1. Uma fábrica dispõe apenas de duas máquinas,  $M_1$  e  $M_2$ , para a produção de peças electrónicas, sendo a máquina  $M_1$  responsável por 80% da produção total da fábrica. O tempo de vida de uma peça (em dias) tem distribuição exponencial  $Exp(\lambda)$ , sendo  $\lambda = 1/500$  para as peças produzidas por  $M_1$  e  $\lambda = 1/1000$  para as peças produzidas por  $M_2$ .
  - (a) Calcule a probabilidade de uma peça produzida pela máquina  $M_1$  durar menos de um ano (365 dias). (1.0)
  - (b) Seleccionada ao acaso uma peça da produção total da fábrica:
    - i) Calcule a probabilidade de a peça durar menos de um ano. (1.5)
    - ii) Sabendo que a peça durou menos de um ano, determine a probabilidade de ter sido a máquina  $M_1$  a produzir essa peça. (1.0)
  - (c) Relativamente à máquina  $M_1$ , qual é o número esperado de peças que fabricará até produzir uma peça que dure mais do que um ano. O que deve assumir para responder a esta questão? (1.5)
2. O tempo de vida de uma máquina tem distribuição normal com valor esperado igual a 3000 horas. Sabendo que 50% dessas máquinas duram menos de 2632 horas ou mais de 3368 horas, calcule o desvio padrão do tempo de vida de uma máquina. (2.0)

### Grupo II

3.0 valores

1. Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias discretas que representam, respectivamente, o número de erros de sintaxe e de *input/output* num programa elaborado por um perito informático. De um estudo prévio, sabe-se que a função de probabilidade conjunta desse par aleatório é dada por

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.2	0.3	0.1
1	0.1	0.2	0.1

- (a) Calcule o coeficiente de correlação entre  $X$  e  $Y$ . Comente o resultado obtido. (2.0)
- (b) Determine o valor esperado condicional de  $X$  dado  $Y = 1$ . (1.0)

**Grupo III****6.5 valores**

1. A quantidade de um poluente do solo de certa região (em *ppm*),  $X$ , possui distribuição que se admite normal com valor esperado  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  desconhecidos.

(a) Prove que  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$  é um estimador centrado de  $\sigma^2$ . (1.0)

(b) Um engenheiro do ambiente recolheu uma amostra  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{10})$  tal que  $\sum_{i=1}^{10} x_i = 238.8$  e  $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 5720.04$ . Com base nesta amostra, obtenha um intervalo de confiança a 99% para o valor esperado da quantidade de poluente do solo. (1.5)

(c) Será que, ao nível de significância de 5%, a amostra obtida pelo engenheiro é consistente com a hipótese de o valor esperado da quantidade de poluente do solo ser superior ou igual a 24 *ppm*? Calcule um intervalo para o valor  $-p$  e comente. (2.0)

2. Um determinado tipo de sistema mecânico é constituído por 10 componentes montadas em paralelo. O produtor deste tipo de sistemas defende que a duração dos mesmos ( $X$ , em milhares de horas) possui função de distribuição dada por  $F_X(x) = (1 - e^{-x})^{10}, x \geq 0$ .

De forma a averiguar a pretensão do produtor foram recolhidas 100 observações, correspondentes à duração de 100 sistemas, tendo estas sido organizadas na seguinte tabela de frequências:

Classe	[0, 2]	]2, 2.5]	]2.5, 3.0]	]3.0, 4.0]	]4, +∞[
Frequência	17	21	21	19	22

(a) Mostre que  $P(X \leq 2) \simeq 0.2336$  e que  $P(2 < X \leq 2.5) \simeq 0.1910$  (0.5)

(b) Averigüe a razoabilidade da conjectura do produtor ao nível de significância de 10%. (1.5)

**Grupo IV****3.5 valores**

Os seguintes dados foram obtidos num estudo para explorar a relação entre a pressão diastólica sanguínea e a idade de crianças do sexo masculino. Com esse objectivo foram seleccionados aleatoriamente 12 rapazes com idades compreendidas entre os 5 e os 13 anos. As observações encontram-se na tabela seguinte, onde  $x$  representa a idade e  $y$  a pressão diastólica sanguínea de cada rapaz:

$x$	5	8	11	7	13	12	6	5	8	12	8	13
$y$	63	67	74	64	75	69	60	60	66	72	64	75

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 108, \sum_{i=1}^{12} y_i = 809, \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 1074, \sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 54877, \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 7455.$$

Tendo em conta a adequação do modelo de regressão linear simples  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$  a esta situação, responda às seguintes questões:

(a) Obtenha as estimativas de mínimos quadrados para os parâmetros  $\beta_0$  e  $\beta_1$  e interprete-as. (1.0)

(b) Calcule um intervalo de confiança a 99% para o valor esperado da pressão diastólica sanguínea para um rapaz de 10 anos. (1.5)

(c) Calcule o coeficiente de determinação. Comente o valor obtido. (1.0)