



PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

1º Exame/2º Teste – LEEC+LEQ+LQ+LEBL

13/01/2005

Duração: 3 horas – 1º semestre 2004/05

17 horas

- Se pretende fazer o **exame** deve resolver **todos os grupos**.
- Se pretende fazer o **2º teste** deve resolver **apenas os grupos III e IV**.
- Justifique convenientemente **todas as respostas!**

Grupo I

5 valores

1. Uma companhia de seguros classifica os seus clientes em 3 classes de risco: alto (A), médio (M) e baixo (B). Com base em registos passados, as probabilidades de os clientes com risco alto, médio e baixo se envolverem em acidentes durante um ano são 0.30, 0.15 e 0.05, respectivamente. Sabe-se que 20% dos clientes são considerados de alto risco e 50% são de risco médio. Qual a probabilidade de haver acidentes num ano entre os segurados dessa companhia? Se um segurado não tem acidentes num ano, qual a probabilidade de ele estar classificado como de alto risco? (2.0)
2. Num troço de uma auto-estrada há duas entradas: acesso norte e acesso sul. Suponha que o número de automóveis que entram pelo acesso norte segue uma distribuição de Poisson com taxa média de 1 automóvel por minuto, enquanto o número de automóveis que entram pelo acesso sul segue uma distribuição de Poisson com taxa média de 2 automóveis por minuto, independentemente do que acontece na entrada norte.
 - (a) Seja X_t o número de automóveis que entram nesse troço da auto-estrada pelo conjunto dos dois acessos em t minutos. Especifique a distribuição de X_t e encontre a probabilidade de em 30 segundos não entrar nenhum carro nesse troço da auto-estrada. (1.5)
 - (b) Sejam T_1 e T_2 os tempos (em minutos) que decorrem desde o início do processo de contagem até à entrada de um automóvel pelos acessos norte e sul, respectivamente. Determine a probabilidade de a entrada do primeiro automóvel na auto-estrada pelo acesso norte ocorrer depois da primeira entrada pelo acesso sul. (1.5)

Grupo II

5 valores

1. Suponha que o diâmetro exterior de um eixo, D , é uma variável aleatória com distribuição Normal de média 4 polegadas e variância 0.01 polegadas². Se o diâmetro diferir do seu valor esperado por mais de 0.05 polegadas e menos de 0.08 polegadas, o prejuízo do fabricante será 0.50 euro. Se o diâmetro diferir do seu valor esperado por mais de 0.08 polegadas, o prejuízo do fabricante será 1.00 euro. Não haverá prejuízo em qualquer outro caso. Encontre a função de probabilidade do prejuízo por cada eixo. Qual o valor esperado do prejuízo relativamente a 50 eixos selecionados aleatoriamente? (2.5)
2. Num tanque de piscicultura com 400 trutas há 3 vezes mais trutas arco-íris do que trutas salmonadas. Desse tanque vai ser recolhida uma amostra retirando sucessivas trutas sem reposição. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias que tomam o valor 1 quando a primeira e a segunda trutas recolhidas são da variedade arco-íris, respectivamente, e 0 no caso contrário. Determine a função de probabilidade de X_2 e calcule a covariância entre as duas variáveis. Sem apresentar cálculos indique quais os resultados que se obteria se as tiragens fossem feitas com reposição. Comente. (2.5)

Grupo III

4 valores

Seja p a proporção desconhecida de defeituosos numa grande coleção de voltímetros, relativamente à qual se pretende testar a hipótese $H_0 : p = 0.2$ contra a hipótese $H_1 : p > 0.2$.

- (a) Seleccionados ao acaso 100 voltímetros verificou-se que 25% eram defeituosos. Construa um teste para as hipóteses indicadas e diga qual a conclusão do mesmo ao nível de significância de 5%. (2.0)
- (b) Considere-se agora um novo procedimento para testar as mesmas hipóteses: (2.0)
- Observa-se uma amostra de 5 voltímetros escolhidos com reposição e anota-se o número X de voltímetros defeituosos. Se $X \leq 2$ aceita-se H_0 e se $X \geq 4$ rejeita-se H_0 ;
 - Caso contrário, observa-se uma segunda amostra de tamanho 5 pelo mesmo processo (independente da primeira). Sendo então Y o número de voltímetros defeituosos na segunda amostra, rejeita-se H_0 se $Y \geq 2$, e aceita-se H_0 no caso contrário.

Calcule a probabilidade do erro de tipo 2 (2ª espécie) cometido por esse teste quando a verdadeira proporção de voltímetros defeituosos é 0.3.

Grupo IV

6 valores

1. Num estudo sobre a fiabilidade de lâmpadas produzidas por um dado processo de fabrico, foram ensaiadas 300 delas, escolhidas aleatoriamente, e anotados os valores t_i , $i = 1, \dots, 300$, da duração T (em horas) das lâmpadas.

- a) Admitindo que T segue uma distribuição Exponencial de valor médio λ , mostre que o estimador de máxima verosimilhança (MV) de λ é a média amostral. Determine a expressão do estimador de MV da probabilidade de uma lâmpada durar pelo menos 150 horas. (1.5)
- b) O agrupamento da amostra observada conduziu aos seguintes resultados (1.5)

T (em horas)	$0 \leq T < 100$	$100 \leq T < 200$	$200 \leq T < 300$	$300 \leq T < 400$	$T \geq 400$
Nº lâmpadas	80	70	65	50	35

com base nos quais se chegou ao valor 220 horas para a média da amostra agrupada. Poder-se-á afirmar que o modelo Exponencial para T se ajusta significativamente aos dados? Justifique calculando o valor- p de um teste adequado.

2. Acredita-se que a tensão Y (em psi) de uma componente de plástico é influenciada pela sua temperatura de moldagem x (em $^{\circ}F$). Os resultados (y_i, x_i) , $i = 1, \dots, 8$, de uma experiência com essas variáveis encontram-se resumidos em

$$\sum_{i=1}^8 y_i = 5745, \quad \sum_{i=1}^8 y_i^2 = 4206125, \quad \sum_{i=1}^8 x_i = 2377, \quad \sum_{i=1}^8 x_i^2 = 707263, \quad \sum_{i=1}^8 y_i x_i = 1699380.$$

Admitindo a validade do modelo de regressão linear simples (Normal) na descrição dos dados indicados, responda às seguintes questões:

- (a) Estime a equação de regressão do modelo em causa. Determine um intervalo de confiança a 99% para o valor esperado da tensão para uma componente de plástico com temperatura de moldagem de $290^{\circ}F$. (1.5)
- (b) Teste se a temperatura de moldagem é influente para a tensão da componente de plástico? (1.5)