

---

# Probabilidades e Estatística

## Probabilidades, Erros e Estatística

### Estatística

2º semestre – 2002/03

Exame de 2ª época / 2º teste

14/07/03 – 9 horas

Duração: 3 horas / 1 hora e 30 minutos

---

- Se pretende fazer o **exame** deve resolver **todos os grupos**.
  - Se pretende fazer o **2º teste** deve resolver **apenas os grupos III e IV**. Nesse caso as cotações passam a ser o dobro das indicadas.
  - Justifique convenientemente **todas as respostas!**
- 

#### Grupo I

5.5 valores

1. Sabendo que  $k_1$  e  $k_2$  são, respectivamente, o número de filhos já nascidos do sexo masculino e feminino de um casal, a probabilidade do casal vir a ter um filho do sexo masculino é  $0.5 + 0.01(k_1 - k_2)$ . Qual é a probabilidade do casal não ter nenhum filho do sexo masculino entre os três primeiros filhos? (1.0)
2. Três máquinas produzem peças do mesmo tipo em grande quantidade, cujos diâmetros (em mm) têm distribuição normal com valor esperado  $\mu$  e variância igual a 2, 5 e 1.49 para a máquina 1, 2 e 3, respectivamente. Se o diâmetro de uma peça diferir do seu valor esperado em pelo menos 2 mm, a peça está fora dos limites de especificação. Sabe-se que a máquina 1 produz o mesmo número de peças que a máquina 3 e metade do número de peças produzidas pela máquina 2.
  - (a) Mostre que a probabilidade de uma peça estar fora dos limites de especificação quando produzida pela máquina 1, 2 e 3 é 0.1586, 0.3734 e 0.1010, respectivamente. (1.5)
  - (b) Se uma peça, seleccionada aleatoriamente da produção conjunta das três máquinas, está fora dos limites de especificação, qual a probabilidade de ela ter sido produzida pela máquina 2? (1.5)
  - (c) Calcule a probabilidade de ser preciso seleccionar mais do que 3 peças produzidas pela máquina 1 até encontrar a primeira peça fora dos limites de especificação. (1.5)

#### Grupo II

4.5 valores

Considere uma caixa com 25 transístores dos quais 3 são defeituosos. Para uma amostra de 2 transístores seleccionados aleatoriamente da caixa, sem reposição, define-se as variáveis  $X_1$  e  $X_2$ , onde

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo transistor é não defeituoso} \\ 0, & \text{se o } i\text{-ésimo transistor é defeituoso} \end{cases}, \quad i = 1, 2.$$

- (a) Determine a função de probabilidade conjunta de  $X_1$  e  $X_2$ . Identifique as distribuições marginais de  $X_1$  e  $X_2$ . Serão  $X_1$  e  $X_2$  variáveis independentes? (2.0)
  - (b) Seja  $Y$  a variável aleatória que indica o número de transístores não defeituosos na amostra. Mostre que o valor esperado e a variância de  $Y$  são, respectivamente, 1.76 e 0.2024. (1.0)
-

- (c) Suponha que o procedimento amostral referido é aplicado, de forma independente, a 30 (1.5) daquelas caixas. Calcule aproximadamente a probabilidade de o número total de transístores não defeituosos registado nas 30 amostras ser pelo menos 50.

### Grupo III

5.5 valores

1. As taxas a que a informação é transferida no sentido Internet-utilizadores, em  $Kbit/seg$ , em dois ISPs diferentes, ISP1 e ISP2, são variáveis aleatórias independentes  $X$  e  $Y$ , respectivamente, com distribuição normal, cujas variâncias são iguais a 1. Utilizando a informação contida nas amostras:

$x$	24.1	23.2	25.3	24.5	26.5	25.5	25.4	25.5		
$y$	80.1	80.3	78.6	77.6	80.3	82.5	83.0	78.4	81.3	81.5

onde  $\sum_i x_i = 200$  e  $\sum_i y_i = 803.6$ .

- (a) Determine um intervalo de confiança a 90% para o valor esperado da taxa de transferência no ISP1. A empresa que gere o ISP1 afirma que a taxa média de transferência no ISP1 é de  $25Kbit/seg$ . Comente a afirmação com base no intervalo de confiança obtido. (2.0)
- (b) Teste ao nível de significância de 10% a hipótese da diferença entre o valor esperado da taxa de transferência no ISP2 e no ISP1 ser igual a  $55Kbit/seg$ . (1.5)

2. Seja  $X$  o número de ovos postos por segundo num determinado aviário. A contagem do número de ovos postos em 100 períodos distintos de 1 segundo conduziu aos seguintes resultados.

número de ovos postos	0	1	2	3	4
número de períodos de 1 segundo	37	44	12	6	1

- (a) Teste a hipótese do número de ovos postos por segundo, neste aviário, ter distribuição Poisson com média 1, ao nível de significância de 5%. (1.5)
- (b) Calcule um intervalo para o valor-p e comente. (0.5)

### Grupo IV

4.5 valores

Suspeita-se que a quantidade de morangos vendida por dia num supermercado ( $Y$ , em  $kg$ ) está relacionada directamente com o preço ( $x$ , em euros por  $kg$ ), a que os morangos são comercializados. Para investigar esta suspeita observaram-se 10 dias, tendo-se obtido os seguintes resultados:

$x$	3.4	2.8	3.1	4	2.1	3.6	1.99	2.85	3.5	2.9
$y$	34.0	41.3	38.3	23.9	48.1	34.7	51.5	43.1	33.5	42.2

$$\bar{x} = 3.024 \quad \sum_i x_i^2 = 95.1226 \quad \bar{y} = 39.06 \quad \sum_i y_i^2 = 15830.44 \quad \sum_i x_i y_i = 1136.45$$

Considerando o modelo de regressão linear  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$  e as hipóteses de trabalho usuais:

- (a) Estime a recta de regressão e teste ao nível de significância de 5% a hipótese de o preço a que os morangos são comercializados não influencia a quantidade de morangos vendidos por dia. (2.0)
- (b) Calcule o coeficiente de determinação e comente-o. (1.0)
- (c) Encontre um intervalo de confiança a 95% para a quantidade esperada de morangos a vender num dia em que o preço for 2.1 euros por  $kg$ . (1.5)