
Probabilidades e Estatística (I)

1º semestre – 2003/04

Exame de 1ª época / 2º teste

17/01/04 – 9 horas

Duração: 3 horas / 1 hora e 30 minutos

- Se pretende fazer o **exame** deve resolver **todos os grupos**.
 - Se pretende fazer o **2º teste** deve resolver **apenas os grupos III e IV**. Nesse caso as cotações passam a ser o dobro das indicadas.
 - Justifique convenientemente **todas as respostas!**
-

Grupo I

7.0 valores

1. A central telefónica dos bombeiros de uma grande cidade recebe chamadas, umas genuínas e outras falsas, isto é, correspondentes ou não a verdadeiros acidentes. Duas zonas problemáticas, o Bairro do Gato (BG) a norte e o Bairro do Rato (BR) a sul, estão na mira dos bombeiros, pois destas zonas sai um grande número de chamadas falsas. A central recebe na totalidade 2% de chamadas falsas, das quais 20% provêm do BG e 40% do BR. Das chamadas genuínas recebidas na central, 5% são feitas do BG.
 - (a) Determine a probabilidade de uma chamada que foi recebida na central ser oriunda do BG. (1.0)
 - (b) Sabendo que uma chamada foi feita no BG qual a probabilidade de ser falsa? (1.0)
 - (c) Considerando que a probabilidade de uma chamada, recebida na central, ser oriunda do BR é 10%, calcule a probabilidade de uma chamada ser proveniente do BR dado que é uma chamada genuína. (1.5)
2. Considere um modelo simples para o tráfego na *world wide web* em que o número de pacotes (X) necessários para a transmissão de uma página na *net* distribui-se uniformemente em $\{1, 2, \dots, 50\}$. Calcule:
 - (a) A probabilidade de ser necessário até 10 (inclusive) pacotes para transmitir uma página. (0.5)
 - (b) A probabilidade de, em 20 páginas transmitidas na *net*, pelo menos 3 delas requererem até 10 (inclusive) pacotes na sua transmissão. (1.5)
 - (c) Um valor aproximado para a probabilidade do número de pacotes necessários à transmissão de 100 páginas exceder 3000. (1.5)

Nota: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Grupo II

3.0 valores

Uma firma envia dois tipos de faxes. O primeiro tipo de fax requer 40 segundos para a transmissão de cada página ao passo que o segundo tipo requer 60 segundos para essa transmissão.

Considere que a v.a. X representa o número de páginas de cada fax e a v.a. Y a duração da transmissão de todo o fax. Após um estudo detalhado, baseado em centenas de transmissões de fax, a firma é da opinião que a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y) é igual a:

$X \backslash Y$	40	60	80	120	180
1	0.15	0.10	0	0	0
2	0	0	0.30	0.35	0
3	0	0	0	0	0.10

(a) Calcule a probabilidade de um fax possuir 2 páginas e ser do segundo tipo. (0.5)

(b) Compare o valor esperado da duração da transmissão de um fax e a duração esperada da transmissão de um fax sabendo que tem 2 páginas. O que conclui? (2.5)

Grupo III

6.0 valores

1. Sejam T_1 e T_2 dois estimadores, independentes, do parâmetro θ de uma população X . Considere que os dois estimadores são centrados e têm variâncias conhecidas, σ_1^2 e σ_2^2 , respectivamente.

(a) Mostre que qualquer estimador da forma seguinte $T = \lambda T_1 + (1 - \lambda)T_2$, com λ constante, é também um estimador centrado de θ . (0.5)

(b) Determine o valor de λ que minimiza o erro quadrático médio de T . (1.0)

2. Um inquérito a 1000 lisboetas revelou que apenas 280 eram favoráveis à proposta de tarifar o tráfego automóvel na Baixa.

(a) Com base nestes dados, construa um intervalo de confiança aproximado a 95% para a proporção dos lisboetas que são favoráveis à proposta. (1.5)

(b) Explique como esse intervalo de confiança poderia ser usado para efectuar um teste sobre um valor para essa proporção. Que nível de significância teria este teste? (0.5)

3. Suponha que uma dada região de vendas de um dado produto foi dividida em 5 sub-regiões, A, B, C, D, E, cada uma delas considerada como tendo a mesma apetência para a venda desse produto. O quadro seguinte mostra o volume de vendas verificado durante os vários dias de observação nas 5 sub-regiões.

Sub-região	A	B	C	D	E
Volume de vendas	110	130	70	90	100

(a) Sabendo que nesses dias foram vendidas no total 500 unidades e admitindo que há igual apetência para a venda desse produto nas 5 sub-regiões, qual o volume esperado de vendas para cada uma das sub-regiões? Com base nas observações, teste ao nível de significância de 1%, se é de admitir igual apetência para a venda desse produto nas 5 sub-regiões. (2.0)

(b) Calcule e comente o valor- p do teste da alínea anterior. (0.5)

Grupo IV

4.0 valores

A altura X (em cm) e o peso Y (em Kg) de 20 estudantes, seleccionados ao acaso, produziu os seguintes valores:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 3275 \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 540049 \quad \sum_{i=1}^{20} y_i = 1305 \quad \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 88418.6 \quad \sum_{i=1}^{20} x_i y_i = 216924.8$$

(a) A partir destes valores, obtenha a estimativa da recta de regressão dos mínimos quadrados e a estimativa habitual da variância dos erros aleatórios associados ao modelo de regressão linear. (1.5)

(b) Teste ao nível de significância de 5%, se há evidência de uma relação de natureza linear entre o peso e a altura. Calcule o coeficiente de determinação e comente os resultados face ao que concluiu anteriormente. (2.5)