Probabilidades e Estatística
Probabilidades, Erros e Estatística
Estatística

1º semestre – 2002/03 | Exame de 1ª época / 2º teste

18/01/03 – 9 horas | Duração: 3 horas / 1 hora e 30 minutos

- Se pretende fazer o **exame** deve resolver **todos os grupos**.
- Se pretende fazer o **2º teste** deve resolver **apenas os grupos III e IV**. Nesse caso as cotações passam a ser o dobro das indicadas.
- Justifique convenientemente **todas as respostas!**

Grupo I 6.5 valores

1. Um psicólogo elaborou um estudo sobre a qualidade das instalações de uma dada residência universitária. Metade dos residentes declarou estar satisfeita, um terço está parcialmente satisfeito e os restantes residentes declararam estar insatisfeitos com as instalações da residência. Entre os alunos que declararam estar satisfeitos 60% são caloiros; dos parcialmente satisfeitos 40% são caloiros e entre os insatisfeitos 20% são caloiros. Suponha que um aluno é escolhido ao acaso entre os residentes.

   (a) Qual é a probabilidade de esse aluno ser caloiro? (1.5)

   (b) Será que se pode dizer que o facto de um aluno estar satisfeito com as instalações da residência não depende de ele ser ou não caloiro? Justifique. (0.5)

2. A duração (em horas) de uma componente electrónica é uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} 100\,x^{-2}, & x \geq 100 \\ 0, & x < 100 \end{cases}.$$

   (a) Encontre as durações mediana e modal dessa componente electrónica. (1.5)

   (b) Qual é a probabilidade dessa componente durar menos de 200 horas, tendo conhecimento que ela continua em funcionamento após 150 horas? (1.5)

   (c) Foram instaladas 30 dessas componentes em certo equipamento. Determine aproximadamente a probabilidade de no máximo um terço dessas componentes ter de ser substituído devido a avaria nas primeiras 150 horas após a sua instalação. Justifique. (1.5)

Grupo II 3.5 valores

O número de crianças do sexo feminino (X) e do sexo masculino (Y) por agregado familiar em certa comunidade constitui um par aleatório com função de probabilidade conjunta dada na tabela seguinte:

Y	X			
	0	1	2	3
0	0.15	0.10	0.09	0.04
1	0.10	0.17	0.11	0
2	0.09	0.11	0	0
3	0.04	0	0	0

(a) Determine a função de probabilidade marginal e o valor esperado de X. (1.0)

(b) Obtenha o número esperado de crianças do sexo feminino num agregado familiar com uma criança do sexo masculino. (1.0)

(c) Calcule a correlação entre X e Y e comente. (1.5)

Grupo III 5 valores

Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|},\ x \in I\!R,\ \lambda > 0.$$

A partir de uma amostra de dimensão 40 desta população obteve-se $\sum_{i=1}^{40} |x_i| = 47.5408$.

(a) Determine o estimador de máxima verosimilhança de λ e calcule uma estimativa de λ com base na amostra recolhida. (2.0)

(b) Sabendo que $Y = |X|$ tem distribuição exponencial com desvio padrão $1/\lambda$, calcule $E(\bar{Y})$ e $Var(\bar{Y})$, sendo $\bar{Y}$ a média de uma amostra aleatória de dimensão n proveniente de Y. Usando os resultados anteriores mostre que, para n suficientemente grande, se tem (1.0)

$$T = \left(\lambda\bar{Y} - 1\right)\sqrt{n} \overset{a}{\sim} N(0,1).$$

(c) Use a variável fulcral T da alínea anterior para testar a hipótese $H_0 : \lambda = 1$ contra a alternativa $H_1 : \lambda \neq 1$. Calcule o valor-p e comente-o. (2.0)

Grupo IV 5 valores

Pretende-se estabelecer uma relação entre os proventos anuais (em milhares de Euros) das famílias de uma dada comunidade (X) e a sua correspondente poupança anual (Y). Para tal foram obtidos os seguintes dados relativos a nove famílias:

x_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_i	0.0	0.1	0.2	0.2	0.5	0.5	0.6	0.7	0.8

$\sum_{i=1}^{9} x_i = 144$ $\quad\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 2364$ $\quad\sum_{i=1}^{9} y_i = 3.6$ $\quad\sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 2.08$ $\quad\sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 63.7$

Considere o modelo de regressão linear $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, em que os erros ε_i são independentes e normalmente distribuídos com valor esperado zero e variância constante e igual a σ^2.

(a) Obtenha a recta de regressão linear estimada. (1.0)

(b) Obtenha um intervalo de confiança a 95% para a poupança esperada das famílias com proventos iguais a 20000 Euros. (1.5)

(c) Efectue um teste de hipóteses sobre β_1 no sentido de ajuizar se X explica ou não parte da variabilidade de Y, considerando um nível de significância de 1%. (1.5)

(d) Calcule o coeficiente de determinação e comente o valor obtido. (1.0)