
Probabilidades e Estatística

Exame de 1ª época / 2º Teste

2º semestre – 2001/02

Duração: 3 horas / 1 hora e 30 minutos

25/6/02 – 9 horas

- Se pretende fazer o **exame** deve resolver **todos os grupos**.
 - Se pretende fazer o **2º teste** deve resolver **apenas os grupos III e IV**. Nesse caso as cotações passam a ser o dobro das indicadas.
 - Justifique convenientemente **todas as respostas!**
-

Grupo I

6.0 valores

1. Na fase final da produção de gravadores de CDs, estes são considerados defeituosos se possuírem pequenas manchas ou amolgadelas à superfície dos seus painéis frontais. Apurou-se que o processo de produção conduz a: 10% de gravadores com manchas, 5% com amolgadelas e 1% com manchas e com amolgadelas.

Obtenha a probabilidade de um gravador seleccionado casualmente do fabrico diário:

(a) Possuir somente amolgadelas no painel frontal. (0.5)

(b) Ser perfeito. (0.5)

Estas imperfeições são perceptíveis e podem afectar o preço do gravador. A probabilidade de uma alteração de preço ocorrer quando o gravador possui exclusivamente manchas no painel frontal é de 0.01, aumentando para 0.02 caso o gravador possua somente amolgadelas. Para além disso, se o gravador possuir manchas e amolgadelas no painel, a referida probabilidade é igual a 0.05, passando para 0.001 quando o painel é perfeito.

(c) Calcule a probabilidade de o preço de um gravador de CD escolhido ao acaso ser afectado. (1.5)

2. As especificações para o diâmetro de um parafuso usado em instrumentos de precisão são 10 ± 0.05 micrón. Um dos fornecedores utiliza um processo de fabrico que resulta em parafusos cujo diâmetro tem distribuição normal com média igual a 10.01 micrón.

(a) Que desvio-padrão deve ter o diâmetro dos parafusos produzidos para que 95% não violem o limite inferior especificado? (1.5)

(b) Assuma o resultado da alínea anterior (se não conseguiu resolver a alínea anterior, use $\sigma = 1$) e que os parafusos são fornecidos em caixas de 10. O comprador examina ao acaso e com reposição os parafusos de cada caixa. Se encontrar mais do que um parafuso que não satisfaça as especificações, rejeita a caixa. Qual é a probabilidade de uma caixa não ser rejeitada? (2.0)

Grupo II

4.0 valores

Os registos do fabricante de um popular modelo de avião ligeiro permitem concluir que a idade do aparelho X e o número médio de horas Y gastas em manutenção não programada durante os três primeiros anos têm a seguinte função densidade de probabilidade conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.4, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0.025, & 1 < x \leq 3, 2 < y \leq 6 \\ 0, & \text{outros valores de } (x,y) \end{cases}$$

- (a) Mostre que a função densidade de probabilidade marginal de X é (2.0)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.8, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0.1, & 1 < x \leq 3, \\ 0, & \text{outros valores de } (x, y) \end{cases}$$

e calcule $E(X)$.

- (b) Calcule a covariância entre X e Y . O que pode concluir? (2.0)

Grupo III

6.5 valores

1. Uma amostra de 10 peixes foi retirada de um lago A e medidas as concentrações de PCB. Os resultados, em partes por milhão usando certa técnica, foram

Lago A: 11.5 10.8 11.6 9.4 12.4 11.4 12.2 11.0 10.6 10.8

Por outro lado uma amostra de 8 peixes foi retirada de outro lago B e medidas as concentrações de PCB. Os resultados correspondentes, usando uma técnica distinta da usada no lago A, foram

Lago B: 11.8 12.6 12.2 12.5 11.7 12.1 10.4 12.6

Considere que as técnicas de medição usadas nos lagos A e B originam observações com distribuições normais, independentes e com variâncias conhecidas e iguais a 0.09 e 0.06, respectivamente. Poderá rejeitar-se a hipótese de os dois lagos estarem igualmente contaminados com PCB? Calcule o valor-p deste teste de hipóteses e comente. (2.0)

2. O número de golos por jogo em 32 jogos do corrente Campeonato do Mundo de Futebol teve a seguinte distribuição

NºGolos	0	1	2	3	4	5
NºJogos	1	7	11	5	6	2

- (a) Admitindo que o número de golos por jogo tem distribuição de Poisson, deduza a estimativa de máxima verosimilhança de λ e estime a probabilidade de haver mais do que 2 golos num jogo, usando método da máxima verosimilhança. Justifique. (2.0)

- (b) Teste ao nível de significância de 1% a hipótese de o número de golos por jogo ter distribuição de Poisson (se não resolveu a alínea (a) use $\hat{\lambda} = 2.5$). (2.5)

Grupo IV

3.5 valores

Suspeita-se que o tempo (em minutos) até falha de uma máquina (Y) esteja relacionado linearmente com a voltagem (em Volt) em que a máquina opera (x). Para investigar a relação entre estas variáveis, planeou-se uma experiência com 10 máquinas similares, seleccionadas ao acaso, tendo-se obtido os resultados no quadro abaixo.

x	110	110	110	110	120	120	120	130	115	115
y	2145	2155	2220	2225	2260	2266	2334	2340	2212	2180

$$\bar{x} = 116, \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 134950, \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 2594430, \bar{y} = 2233.7, \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 49934931 \quad (1)$$

Considerando o modelo de regressão linear $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$ e as hipóteses de trabalho usuais:

- (a) Estime a recta de regressão e teste ao nível de significância de 1% a hipótese de a voltagem em que a máquina opera não influenciar o tempo até falha da máquina. (2.5)

- (b) Calcule o coeficiente de determinação e interprete-o. (1.0)