Probabilidades e Estatística

2ºÉpoca/ 2ºTeste — 1ºsemestre – 2002/03

Duração: 3 horas /1 hora e 30 minutos — 04/02/03 – 9 horas

RESOLUÇÃO ABREVIADA

Grupo I

1.

Acontecimento	**Probabilidade**
N=moldes enchidos à velocidade normal	$P(N) = 0.8$
$\bar{N}$=moldes enchidos a grande velocidade	$P(\bar{N}) = 1 - P(N) = 1 - 0.8 = 0.2$
C=moldes enchidos correctamente	
$C\|N$	$P(C\|N) = 0.95$
$C\|\bar{N}$	$P(C\|\bar{N}) = 0.9$

(a) Recorrendo à lei da probabilidade total tem-se

$$\begin{aligned} P(\bar{C}) &= P(\bar{C}|N)P(N) + P(\bar{C}|\bar{N})P(\bar{N}) \\ &= (1 - P(C|N))P(N) + (1 - P(C|\bar{N}))P(\bar{N}) \\ &= (1 - 0.95) \times 0.8 + (1 - 0.9) \times 0.2 = 0.06 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(N|\bar{C}) &= \frac{P(\bar{C}|N)P(N)}{P(\bar{C})} \qquad \text{(Teo. Bayes)} \\ &= \frac{(1 - P(C|N))P(N)}{P(\bar{C})} \\ &= \frac{(1 - 0.95) \times 0.8}{0.06} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(c) $X=$ número de moldes incorrectamente enchidos em 20 seleccionados ao acaso de um grande lote
$X \sim Bin(n = 20, p = P(\bar{C}) = 0.06)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{1} \binom{20}{x} 0.06^x (1 - 0.06)^{20-x} \\ &= 1 - F_{Bin(20,0.06)}(1) = 1 - 0.6605 = 0.3395 \end{aligned}$$

2. X=número total de amostras inspeccionadas até ser detectada uma com alto teor de metais pesados
$X \sim Geom(p = 0.01)$, onde
$p = P$(Ser detectada a presença de alto teor de metais pesados, numa amostra seleccionada ao acaso) $= 0.01$

(a) $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.01} = 100$ e $Var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{0.99}{0.01^2} = 9900$

(b)

$$P(X \leq 3) = \sum_{x=1}^{3} P(X = x) = \sum_{x=1}^{3} 0.99^{x-1} 0.01 = 0.01 \times \frac{1 - 0.99^3}{1 - 0.99} = 0.029701$$

Grupo II

X_i=número de "kits" vendidos semanalmente pela sucursal i, $i = 1, 2$
$X_i \sim Po(\lambda_i)$ com $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 15$, X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes

(a) T= número total de "kits" vendidos semanalmente pelas duas sucursais,
$T = X_1 + X_2$
Como X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson, pode afirmar-se que T também tem distribuição Poisson com parâmetro

$$\lambda_T = E(T) = E(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2 = 25$$

i.e. $T \sim Po(\lambda_T = 25)$

$$P(T > 25) = 1 - P(T \leq 25) = 1 - F_{Po(25)}(25) = 1 - 0.5529 = 0.4471$$

Por outro lado, como $\lambda = 25 > 5$ podemos considerar que

$$T \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(\mu = \lambda_T = 25, \sigma^2 = \lambda_T = 25)$$

Usando esta aproximação e efectuando a correcção de continuidade tem-se

$$P(T > 25) = 1 - P(T \leq 25) \simeq 1 - \Phi(\frac{25 + 0.5 - 25}{\sqrt{25}}) = 1 - \Phi(0.1) = 1 - 0.5398 = 0.4602$$

Caso não se use correcção de continuidade a mesma probabilidade pode ser aproximada por

$$P(T > 25) = 1 - P(T \leq 25) \simeq 1 - \Phi(\frac{25 - 25}{\sqrt{25}}) = 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5$$

Sejam e_c e e_s os erros relativos das aproximações com e sem correcção de continuidade, respectivamente

$$e_c = \left| \frac{0.4602 - 0.4471}{0.4471} \right| \simeq 0.0293$$

Um erro relativo com correcção de continuidade de 3% é pequeno.

$$e_s = \left| \frac{0.5 - 0.4471}{0.4471} \right| \simeq 0.1183$$

Pode concluir-se que usando a correcção de continuidade a aproximação é bem mais precisa, mas mesmo assim comete-se um erro relativo de cerca de 3%, o que nos leva a reiterar a importância do uso de resultados exactos em detrimento de aproximados.

(b) S= facturação semanal das duas sucursais (em euros)

$$S = 100X_1 + 225X_2$$

$$\begin{aligned}
E(S) &= E(100X_1 + 225X_2) = 100E(X_1) + 225E(X_2) \\
&= 200 \times 10 + 225 \times 15 = 5375 \text{ euros} \\
Var(S) &= Var(100X_1 + 225X_2) = 100^2 Var(X_1) + 225^2 Var(X_2) \qquad \text{(Indep.)} \\
&= 200^2 \times 10 + 225^2 \times 15 = 1159375 \text{ euros}^2 \\
\sigma_S &= \sqrt{Var(S)} \simeq 1076.74 \text{ euros}
\end{aligned}$$

Grupo III

(a) Seja $(X_1,\ldots,X_n)$ uma amostra aleatória e $(x_1,\ldots,x_n)$ uma sua concretização (amostra). A função verosimilhança é, para $x_i > 2.5,\ i = 1,\ldots,n$, dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\lambda|x_1,\ldots,x_n) &= f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X\,i}(x_i) \quad \text{(Independência)}\\
&= \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) \quad \text{(Ident. Dist.)}\\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda 2.5^{\lambda}}{x_i^{\lambda+1}} = \frac{\lambda^n 2.5^{n\lambda}}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{\lambda+1}},\ \ \lambda > 0
\end{aligned}$$

e a função log-verosimilhança, para $x_i > 2.5,\ i = 1,\ldots,n$, é dada por

$$l(\lambda|x_1,\ldots,x_n) = \ln\left(\mathcal{L}(\lambda|x_1,\ldots,x_n)\right) = n\ln\lambda + n\lambda\ln 2.5 - (\lambda+1)\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)$$

A estimativa de máxima verosimilhança de λ, $\hat{\lambda}$, maximiza a função log-verosimilhança, *i.e.* deve ser tal que

$$\begin{cases}
\left[\dfrac{dl(\lambda|x_1,\ldots,x_n)}{d\lambda}\right]_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0 & \text{(ponto de estacionaridade)}\\
\left[\dfrac{d^2 l(\lambda|x_1,\ldots,x_n)}{d\lambda^2}\right]_{\lambda=\hat{\lambda}} < 0 & \text{(ponto de máximo)}
\end{cases}$$

Do mesmo modo

$$\begin{cases}
\dfrac{n}{\hat{\lambda}} + n\ln 2.5 - \ln\left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right) = 0 & \\
-\dfrac{n}{\hat{\lambda}^2} < 0 & \text{(Prop. Verdadeira)}
\end{cases}$$

Logo a estimativa de máxima verosimilhança de λ é dada por

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\dfrac{1}{n}\ln\left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right) - \ln 2.5} = (\ln m_g - \ln 2.5)^{-1}$$

onde $m_g = \left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$, e o estimador de máxima verosimilhança para λ por

$$EMV(\lambda) = (\ln M_g - \ln 2.5)^{-1}$$

onde $M_g = \left(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}$. Particularizando para a amostra recolhida obtém-se:

$$\hat{\lambda} = (\ln(4.2427) - \ln 2.5)^{-1} \simeq 1.8907$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X>3.5) &= 1-P(X\le 3.5) = 1-\int_{2.5}^{3.5}\frac{\lambda 2.5^{\lambda}}{x^{\lambda+1}}dx \\ &= 1-\left[\lambda 2.5^{\lambda}\frac{x^{-(\lambda+1)+1}}{-(\lambda+1)+1}\right]_{2.5}^{3.5} \\ &= 1+2.5^{\lambda}(3.5^{-\lambda}-2.5^{-\lambda}) = \left(\tfrac{5}{7}\right)^{\lambda} \end{aligned}$$

Pela propriedade da invariância dos estimadores de máxima verosimilhança, a estimativa de máxima verosimilhança de $P(X > 3.5)$ é

$$\hat{P}(X>3.5) = \left(\frac{5}{7}\right)^{\hat{\lambda}} \simeq \left(\frac{5}{7}\right)^{1.8907} \simeq 0.5293$$

(c) Para determinar o $IC_{95\%}(\lambda)$ recorre-se ao método da v.a. fulcral.

Variável fulcral: $T = 100\lambda\,(\ln M_g - \ln 2.5) \sim \chi^2_{(100)}$

Quantil de probabilidade: Determina-se a e b tal que $P(a \le T \le b) = 1-\alpha$. Como o nível de confiança é $1-\alpha = 0.95$ tem-se

$$F_{\chi^2_{(100)}}(a) = \frac{0.05}{2} \wedge F_{\chi^2_{(100)}}(b) = 1-\frac{0.05}{2} \Leftrightarrow a = F^{-1}_{\chi^2_{(100)}}(0.025) \wedge b = F^{-1}_{\chi^2_{(100)}}(0.975).$$

Consultando as tabelas de quantis de probabilidade da distribuição $\chi^2_{(100)}$ obtém-se $a = 74.22$ e $b = 129.6$.

Intervalo de Confiança Aleatório: Partindo de $P(a \le T \le b) = 1-\alpha$ obtém-se

$$P\left[\frac{a}{100\,(\ln M_g - \ln 2.5)} \le \lambda \le \frac{b}{100\,(\ln M_g - \ln 2.5)}\right] = 1-\alpha$$

e pode escrever-se

$$ICA_{95\%}(\lambda) = \left[\frac{74.22}{100\,(\ln M_g - \ln 2.5)}, \frac{129.6}{100\,(\ln M_g - \ln 2.5)}\right]$$

Intervalo de Confiança:

$$IC_{95\%}(\lambda) = \left[\frac{74.22}{100\,(\ln m_g - \ln 2.5)}, \frac{129.6}{100\,(\ln m_g - \ln 2.5)}\right]$$

Concretizando

$$\begin{aligned} IC_{95\%}(\lambda) &= \left[\frac{74.22}{100\,(\ln(4.2427) - \ln 2.5)}, \frac{129.6}{100\,(\ln(4.2427) - \ln 2.5)}\right] \\ &\simeq [1.4033, 2.4503] \end{aligned}$$

Grupo IV

1. Seja $(X_1, \ldots, X_{150})$ uma amostra aleatória de dimensão $n = 150$ duma população $X \sim Bern(p)$ com $p = P($Um apreciador preferir "Glut-Glut"$)$ e onde para $i = 1, \ldots, 150$, $X_i = 1$ se o apreciador i prefere "Glut-Glut" e $X_i = 0$ caso contrário

   Hipóteses: $H_0 : p = 0.40$ *vs* $H_1 : p \neq 0.40$

   Variável fulcral: Sabe-se que o estimador de máxima verosimilhança de p é $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$, onde os X_i's são variáveis aleatórias independentes e com distribuição $Bern(p)$. Para além disso $E(\bar{X}) = E(X) = p < \infty$ e $Var(\bar{X}) = \dfrac{Var(X)}{n} = \dfrac{p(1-p)}{n} < \infty$. Então pelo teorema do limite central pode afirmar-se que

$$T = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Estatística do teste: $T_0 = T\,|H_0 = \dfrac{\bar{X} - 0.40}{\sqrt{\frac{0.40(1-0.4)}{150}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Região de rejeição: Tratando-se de um teste bilateral a região de rejeição é do tipo $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

Determinação do quantil: Determina-se a tal que $P(|T_0| > a|H_0) = \alpha$. Como o nível de significância é $\alpha = 0.04$ tem-se

$$\Phi(a) = 1 - 0.04/2 \Leftrightarrow a = \Phi^{-1}(0.98).$$

Consultando as tabelas dos quantis de probabilidade da $\mathcal{N}(0,1)$ obtém-se $a = 2.0537$.

Regra de decisão: Rejeitar H_0 se $|t_0| \geq 2.0537$ e não rejeitar caso contrário, onde t_0 é o valor observado da estatística de teste.

Decisão: $t_0 = \dfrac{54/150 - 0.4}{\sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{150}}} = -1 \notin (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ logo não se deve rejeitar-se H_0 ao nível de significância de 4%, *i.e.*, a amostra é consistente com a afirmação do fabricante para o tal nível de significância.

2. *Hipóteses*: $H_0 : X$ tem a distribuição dada *vs* $H_1 : X$ não tem essa distribuição

Estatística do teste: $T_0 = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\sim} \chi^2_{(k-\beta-1)}$

Valor observado da estatística do teste: Cálculo da probabilidade de cada classe, admitindo que H_0 é verdadeira:

$$\begin{aligned}
p_1 &= P(0 \leq X < 0.4|H_0) = F_X(0.4) = 0.4 - 0.4^2/4 = 0.36 \\
p_2 &= P(0.4 \leq X < 0.8|H_0) = F_X(0.8) - F_X(0.4) = 0.64 - 0.36 = 0.28 \\
p_3 &= P(0.8 \leq X < 1.2|H_0) = F_X(1.2) - F_X(0.8) = 0.84 - 0.64 = 0.20 \\
p_4 &= P(1.2 \leq X < 1.6|H_0) = F_X(1.6) - F_X(1.2) = 0.96 - 0.84 = 0.12 \\
p_5 &= P(1.6 \leq X \leq 2.0|H_0) = P(X \geq 1.6|H_0) = 1 - F_X(1.6) = 1 - 0.96 = 0.04
\end{aligned}$$

Classe	o_i	p_i	$E_i = np_i$
$[0.0, 0.4[$	80	0.36	72
$[0.4, 0.8[$	66	0.28	56
$[0.8, 1.2[$	24	0.20	40
$[1.2, 1.6[$	20	0.12	24
$[1.6, 2.0]$	10	0.04	8
Total	n=200	1.00	200

Como todas as frequências esperadas (E_i) são maiores que 5 não há necessidade de agrupar classes. O valor observado da estatística do teste é

$$t_0 = \sum_{i=1}^{k} (o_i - E_i)^2 / E_i = 10.2413$$

Valor-p: $p = P\left(T_0 \geq 10.2413|H_0\right) = 1 - F_{\chi^2_{(5-1)}}(10.2413)$. Note que $k = 5$ e, uma vez que não se estimou nenhum parâmetro, $\beta = 0$.

$F_{\chi^2_{(4)}}(10.2413)$ não está na tabela, mas pode ser enquadrada:

$$F_{\chi^2_{(4)}}(9.488) = 0.950 < F_{\chi^2_{(4)}}(10.2413) < F_{\chi^2_{(4)}}(11.14) = 0.975$$

logo

$$0.025 = 1 - 0.975 < p < 1 - 0.950 = 0.05$$

Regra de decisão: Rejeitar H_0 para $\alpha \geq 0.05$, não rejeitar H_0 para $\alpha \leq 0.025$ e nada se pode decidir para $\alpha \in (0.025, 0.05)$.

Decisão: Rejeitar H_0 (*i.e.* os números pseudo-aleatórios não estão a ser gerados de acordo com a distribuição teórica pretendida) para os níveis de significância usuais de 5% e 10% mas não se rejeita H_0 para o de 1%.