Probabilidades e Estatística

1º Teste – **Teste A** 2º semestre – 2001/02

Duração: 1 hora e 30 minutos 11/05/02 – 9 horas

RESOLUÇÃO ABREVIADA

Grupo I

1.

Acontecimento	**Probabilidade**
I=poluição causada por gases industriais	$P(I) = 0.75$
A=poluição causada por escapes automóveis	$P(A) = 0.25$
C=controlo bem sucedido da poluição nos próximos 4 anos	
$C\|I$	$P(C\|I) = 0.70$
$C\|A$	$P(C\|A) = 0.60$

(a)

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|I)P(I) + P(C|A)P(A) && \text{(Lei Prob. Total)} \\ &= 0.70 \times 0.75 + 0.60 \times 0.25 = 0.675 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(A|C) &= \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} && \text{(Teo. Bayes)} \\ &= \frac{0.60 \times 0.25}{0.675} = 0.222 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(I|\bar{C}) &= \frac{P(\bar{C}|I)P(I)}{P(\bar{C})} && \text{(Teo. Bayes)} \\ &= \frac{(1-0.70) \times 0.75}{1-0.675} = 0.692 \end{aligned}$$

2. X=diâmetro do pistão, quando o processo está sob controlo (em mm)

(a) $X \sim Unif(a = 18, b = 22)$

$$P(\text{Alerta sob controlo}) = P(X > 21.5) = \int_{21.5}^{22} \frac{1}{22-18} dx = \frac{22-21.5}{22-18} = 0.125$$

(b) N= número de medições até à ocorrência do primeiro alerta, quando o processo está sob controlo

Assumindo que as medições são independentes e que a probabilidade de ocorrer alerta em qualquer medição é constante e igual a p, quando o processo está sob controlo

$N \sim Geom(p = 0.125)$

Logo

$$\begin{aligned} P(N \geq 16) &= \sum_{x=16}^{\infty} (1-0.125)^{x-1} 0.125 \\ &= 0.125 \frac{(1-0.125)^{15}}{0.125} = (1-0.125)^{15} = 0.135 \end{aligned}$$

ou, em alternativa,

Y=número de alertas nos primeiros 15 intervalos de tempo, quando o processo está sob controlo

Assumindo as mesmas hipóteses que anteriormente

$Y \sim Bin(n = 15, p = 0.125)$.

Logo

$$P(N \geq 16) = P(Y = 0) = \binom{15}{0} 0.125^0 (1-0.125)^{15-0} = 0.135$$

(c) X=diâmetro do pistão, quando o processo está fora de controlo (em mm)

$X \sim Unif(a = 20, b = 25)$

$$P(\text{Alerta fora de controlo}) = P(X > 21.5) = \int_{21.5}^{22} \frac{1}{22-18} dx = \frac{25-21.5}{25-20} = 0.7$$

Do mesmo modo,

N= número de medições até à ocorrência do primeiro alerta, quando o processo está fora controlo

$N \sim Geom(p = 0.70)$

$$\begin{aligned} P(N \geq 16) &= \sum_{x=16}^{\infty} (1-0.70)^{x-1} 0.70 \\ &= 0.70 \frac{(1-0.70)^{15}}{0.70} = (1-0.70)^{15} \simeq 0.0 \end{aligned}$$

Se o suporte da f.d.p. do diâmetro do pistão se deslocar para a direita, sem que o valor de alerta se altere (21.5 mm), haverá quase certamente pelo menos um sinal de alerta nas primeiras 15 medições.

Grupo II

$$P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{6}$$

$$P(X = x|Y = 0) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x = -1, 0, 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$P(X = x|Y = 1) = \begin{cases} 0.1, & x = -1, 1 \\ 0.8, & x = 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

(a)

$$\begin{aligned}
P(X=-1) &= P(X=-1|Y=0)P(Y=0) \\
&\quad +P(X=-1|Y=1)P(Y=1) \qquad \text{(Lei Prob. Total)} \\
&= (0.1+\frac{1}{3})0.5 = \frac{13}{60} \\
P(X=0) &= P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1) \\
&= P(X=0,Y=0)+P(X=0|Y=1)P(Y=1) \\
&= \frac{1}{6}+0.8\times 0.5 = \frac{17}{30} \\
P(X=1) &= 1-P(X=-1)-P(X=0) = \frac{13}{60}
\end{aligned}$$

Logo, a função de probabilidade marginal de X é

$$P\{X=x\} = \begin{cases} \frac{13}{60}, & x=-1,1 \\ \frac{17}{30}, & x=0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

e a função de distribuição marginal de X será

$$F_X(x) = P(X\leq x) = \sum_{k\leq x} P(X=k) = \begin{cases} 0, & x<-1 \\ \frac{13}{60}, & -1\leq x<0 \\ \frac{47}{60}, & 0\leq x<1 \\ 1, & x\geq 1 \end{cases}$$

(b) Função de probabilidade conjunta de X e Y, $P(X=x,Y=y)$

Y/X	-1	0	1	$P(Y=y)$
0	1/6	1/6	1/6	1/2
1	0.05	0.40	0.05	1/2
$P(X=x)$	13/60	17/30	13/60	1

$$E[X] = \sum_{x=-1}^{1} xP(X=x) = -1\times\frac{13}{60}+0\times\frac{17}{30}+1\times\frac{13}{60} = 0$$

Ou, em alternativa, como X tem função de probabilidade simétrica em torno de 0, $E[X]=0$

$$\begin{aligned}
E[Y] &= \sum_{y=0}^{1} yP(Y=y) = (0+1)\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
E[XY] &= \sum_{x=-1}^{1}\sum_{y=0}^{1} xyP(X=x,Y=y) \\
&= (-1)\times 1\times P(X=-1,Y=1)+1\times 1\times P(X=1,Y=1) = 0 \\
Cov(X,Y) &= E[XY]-E[X]E[Y] = 0-0\times\frac{1}{2} = 0 \\
Corr(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}} = 0
\end{aligned}$$

Embora $Corr(X,Y)=0$, X e Y não são independentes, pois, por exemplo,

$$P(X=0,Y=0)=\frac{1}{6}\neq P(X=0)\times P(Y=0)=\frac{17}{30}\times\frac{1}{2}=\frac{17}{60}$$

ou

$$P(X=1|Y=0)\neq P(X=1|Y=1)$$

Probabilidades e Estatística

1º Teste – **Teste B** 2º semestre – 2001/02

Duração: 1 hora e 30 minutos 11/05/02 – 11 horas

RESOLUÇÃO ABREVIADA

Grupo I

1.

Acontecimento	**Probabilidade**
I=computadores com capacidade de processamento de imagem	$P(I) = 0.20$
S=computadores com capacidade de processamento de som	
$S\|I$	$P(S\|I) = 0.15$
$S \cap \bar{I}$	$P(S \cap \bar{I}) = 0.10$

(a)

$$\begin{aligned} P(S \cup I) &= P(S) + P(I) - P(S \cap I) \\ &= P(S \cap I) + P\left(S \cap \bar{I}\right) + P(I) - P(S \cap I) \\ &= P\left(S \cap \bar{I}\right) + P(I) \\ &= 0.10 + 0.20 = 0.30 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P\left[I | \left(\bar{I} \cup \bar{S}\right)\right] &= \frac{P\left[I \cap \left(\bar{I} \cup \bar{S}\right)\right]}{P\left(\bar{I} \cup \bar{S}\right)} = \frac{P\left(I \cap \bar{S}\right)}{P\left(\overline{I \cap S}\right)} = \frac{P\left(I \cap \bar{S}\right)}{1 - P(I \cap S)} \\ &= \frac{P\left(\bar{S}|I\right) P(I)}{1 - P(S|I)P(I)} \qquad \text{(Lei Prob. Compostas)} \\ &= \frac{[1 - P(S|I)]P(I)}{1 - P(S|I)P(I)} \\ &= \frac{(1 - 0.15) \times 0.20}{1 - 0.15 \times 0.20} = 0.175 \end{aligned}$$

2. $X =$ venda semanal de gasolina (em dezenas de milhares de litro)

(a)

$$\begin{aligned} P(X \leq 1.6) &= \int_1^{1.6} f_X(x)dx = \int_1^{1.6} (x-1)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^{1.6} = 0.18 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X < 2.3 | X \geq 1.6) &= \frac{P(1.6 \leq X < 2.3)}{P(X \geq 1.6)} \\ &= \frac{\int_{1.6}^{2}(x-1)dx + \int_{2}^{2.3}(3-x)dx}{1 - P(X < 1.6)} \\ &= \frac{\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{1.6}^{2.0} + \left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_2^{2.3}}{1 - 0.18} = 0.701 \end{aligned}$$

(c) Seja s a quantidade mínima de gasolina (em dezenas de milhares de litro) a adquirir semanalmente. Como a função de densidade de probabilidade $f_X(x)$ é simétrica em torno do ponto $x = 2$, $F_X(2) = 0.5 < 0.92$, pelo que a solução s da equação

$$F_X(s) = P(X \leq s) = 0.92 \tag{1}$$

é necessariamente maior que 2 e satisfaz a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x-1)dx + \int_2^s (3-x)dx = 0.92 &\iff -\frac{s^2}{2} + 3s - 3.5 = 0.92 \\ &\iff s = 2.6 \end{aligned}$$

A outra solução da equação (**??**), $s = 3.4$, não é solução admissível pois não pertence ao contradomínio da v.a. X, $[1,3]$.

(d) $E(X) = 2$ porque a v.a. X tem função de densidade de probabilidade $f_X(x)$ simétrica em torno do ponto $x = 2$. Ou, em alternativa,

$$E[X] \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_1^2 x(x-1)\,dx + \int_2^3 x(3-x)\,dx = 2$$

Grupo II

$X =$ massa da biela (em Kg)
$Y =$ massa da manivela (em Kg)

$X \sim \mathcal{N}(\mu_X = 1.00, \sigma_X^2 = 0.02^2)$
$Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y = 0.80, \sigma_Y^2 = 0.05^2)$

(a) $W = X + Y =$ massa total da componente mecânica

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= 0.0049 \iff \\ Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) &= 0.0049 \iff \\ 0.002^2 + 0.005^2 + 2Cov(X,Y) &= 0.0049 \iff \\ Cov(X,Y) &= 0.001 \end{aligned}$$

$$Corr(X,Y) \quad = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{0.001}{0.02 \times .05} = 1$$

donde X e Y são v.a. dependentes e além disso Y é uma transformação linear de X, $Y = aX + b$, onde $a > 0$. Mais ainda, uma vez que

$$\begin{cases} Var(Y) = Var\,(aX+b) = a^2 Var(X) \\ E(Y) = E\,(aX+b) = aE(X) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.05^2 = a^2 \times 0.02^2 \\ 0.80 = a \times 1.00 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2.5 \\ b = -1.7 \end{cases}$$

(b) $W \sim \mathcal{N}(\mu = \mu_X + \mu_Y = 1.80, \sigma^2 = 0.0049)$

(i)

$$\begin{aligned} P\left(|W - 1.8| > 0.075\right) &= 1 - P(|W-1.8| \leq 0.075) = 1 - P(-0.075 \leq W - 1.8 \leq 0.075) \\ &= 1 - P\left(-\frac{0.075}{\sqrt{0.0049}} \leq \frac{W-1.8}{\sqrt{0.0049}} \leq \frac{0.075}{\sqrt{0.0049}}\right) \\ &= 1 - (\Phi(1.07) - \Phi(-1.07)) = 1 - (0.8577 - 0.1423) = 0.2846 \end{aligned}$$

(ii) $N =$ número de peças que não respeitam as especificações, em 15 seleccionadas aleatoriamente e com reposição

$$N \sim Bin(n = 15, p = 0.2846)$$

Logo

$$P(N \geq 3) \quad = \quad 1 - P(N \leq 2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \binom{15}{x} 0.2846^x 0.7154^{15-x} = 1 - 0.1552 = 0.8448$$

Ou, em alternativa, consultando a tabela da $Bin(15, 0.30)$:

$$P(N \geq 3) \simeq 1 - F_{Bin(15,0.3)}(2) = 1 - 0.1268 = 0.8732$$