Probabilidades e Estatística

1ºTeste – **Teste A** — 1ºsemestre – 2002/03

Duração: 1 hora e 30 minutos — 16/11/02 – 9 horas

RESOLUÇÃO ABREVIADA

Grupo I

1.

Acontecimento	**Probabilidade**
J=habitante mais jovem	$P(J) = 0.25$
V=habitante mais velho	$P(V) = 0.40$
O=outras faixas etárias	$P(O) = 1 - P(J) - P(V) = 1 - 0.25 - 0.40 = 0.35$
F=habitante favorável ao projecto	
$F\|J$	$P(F\|J) = 0.5$
$\bar{F}\|V$	$P(\bar{F}\|V) = 0.2$
$F\|V$	$P(F\|V) = 1 - P(\bar{F}\|V) = 0.8$
$F\|O$	$P(F\|O) = 0.3$

(a) Recorrendo à lei da probabilidade total tem-se

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F|J)P(J) + P(F|V)P(V) + P(F|O)P(O) \\ &= 0.5 \times 0.25 + 0.8 \times 0.4 + 0.3 \times 0.35 = 0.55 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(J|F) &= \frac{P(F|J)P(J)}{P(F)} \qquad \text{(Teo. Bayes)} \\ &= \frac{0.5 \times 0.25}{0.55} \simeq 0.2273 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(V|F) &= \frac{P(F|V)P(V)}{P(F)} \qquad \text{(Teo. Bayes)} \\ &= \frac{0.8 \times 0.4}{0.55} \simeq 0.5818 \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} P(O|F) &= 1 - P(J|F) - P(V|F) \\ &\simeq 1 - 0.2273 - 0.5818 = 0.1909 \end{aligned}$$

É mais provável que um habitante favorável ao projecto pertença à faixa etária dos mais velhos do que a qualquer outra faixa etária.

2. (a) X_t=número de estações de abastecimento numa auto-estrada de comprimento t (em km)
$X_t \sim Po(\alpha t)$. Quando $t = 20$, $E(X_{20}) = \alpha \times 20 = 1$ logo $\alpha = 1/20 = 0.05$, onde α representa o número médio de estações por km de auto-estrada. Assim sendo $X_{48} \sim Po(0.05 \times 48)$ *i.e.* $X_{48} \sim Po(2.4)$

$$P(X_{48} \geq 2) = 1 - P(X_{48} < 2) = 1 - P(X_{48} \leq 1) = 1 - F_{Po(2.4)}(1) = 1 - 0.3084 = 0.6916$$

(b) Y=número de estações com gasolina em 3 estações inspeccionadas ao acaso
$p = P(\text{Uma estação inspeccionada ao acaso ter gasolina}) = 1 - 0.3 = 0.7$. Então $Y \sim Bin(n = 3, p = 0.7)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} 0.7^0(1 - 0.7)^3 = 0.973$$

(c) T=número de estações inspeccionadas até o motorista encontrar a primeira estação com gasolina
$p = P(\text{Uma estação inspeccionada ao acaso ter gasolina}) = 0.7$.
Admitindo que a auto-estrada tem um elevado número de estações de abastecimento e que o motorista tem gasolina suficiente para a referida inspecção, $T \sim Geom(p = 0.7)$. Então

$$E(T) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.7} \simeq 1.429$$

Grupo II

(a) X=indicador de vitória no jogo de preparação
Y=número da estratégia empregue no jogo de preparação

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \begin{cases} \sum_{y=1}^{3} \frac{y}{18} = \frac{1}{3}, & x = 0 \\ \sum_{y=1}^{3} \frac{2+y}{18} = \frac{2}{3}, & x = 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

De onde se pode concluir que $X \sim Bern\left(p = \frac{2}{3}\right)$ logo $E(X) = \frac{2}{3}$ e $Var(X) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$.

$$P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y) = \begin{cases} \sum_{x=0}^{1} \frac{2x}{18} = \frac{2}{9}, & y = 1 \\ \sum_{x=0}^{1} \frac{2x+1}{18} = \frac{1}{3}, & y = 2 \\ \sum_{x=0}^{1} \frac{2x+1}{18} = \frac{4}{9}, & y = 3 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{3} yP(Y = y) = 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{4}{9} = \frac{20}{9}$$

$$Var(Y) = E\left(Y^2\right) - E(Y)^2 = \sum_{y=1}^{3} y^2 P(Y = y) - \left(\frac{20}{9}\right)^2 = \frac{50}{9} - \left(\frac{20}{9}\right)^2 = \frac{50}{81}$$

(b)

$$E(XY) = \sum_{x,y} xyP(X=x, Y=y) = \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=1}^{3} xy\frac{2x+y}{18} = \frac{13}{9}$$

Dado que $E(X) \times E(Y) = \frac{2}{3} \times \frac{20}{9} = \frac{40}{27} \neq E(XY) = \frac{13}{9}$ podemos concluir que $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \neq 0$ donde X e Y não são variáveis aleatórias independentes *i.e.* o resultado do jogo de preparação depende da estratégia escolhida.

(c) A função de probabilidade condicional de X dado $Y = 1$ é

$$P(X = x|Y = 1) \quad = \quad \frac{P\,(X = x, Y = 1)}{P\,(Y = 1)} = \begin{cases} 0.25, & x = 0 \\ 0.75, & x = 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Pode então afirmar-se que $X|Y = 1 \sim Bern(p = 0.75)$ e por esta razão $E(X|Y = 1) = 0.75$ e $Var(X|Y = 1) = 0.75 \times (1 - 0.75) = 0.1875$

(d) A probabilidade da selecção ganhar o jogo quando é empregue cada uma das três estratégias é, para $y = 1, 2, 3$:

$$P(X = 1|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \begin{cases} \frac{3}{4} & y = 1 \\ \frac{2}{3}, & y = 2 \\ \frac{5}{8}, & y = 3 \end{cases}$$

Uma vez que é mais provável ganhar o jogo se for escolhida a estratégia 1, o treinador deverá optar por esta estratégia.

Probabilidades e Estatística

1ºTeste – **Teste B** 1ºsemestre – 2002/03

Duração: 1 hora e 30 minutos 16/11/02 – 11 horas

RESOLUÇÃO ABREVIADA

Grupo I

1.

Acontecimento	**Probabilidade**
M=empregado do sexo masculino	$P(M) = \frac{1}{3}$
F=empregado sexo feminino	$P(F) = 1 - P(M) = \frac{2}{3}$
L=empregado licenciado	
$L\|M$	$P(L\|M) = \frac{1}{3}$
$L\|F$	$P(L\|F) = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} P(F|L) &= \frac{P(L|F)P(F)}{P(L)} && \text{(Teo. Bayes)} \\ &= \frac{P(L|F)P(F)}{P(L|F)P(F) + P(L|M)P(M)} && \text{(Lei Prob. Total)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

2. X=número de acidentes numa fábrica por mês
$X \sim Po(\lambda)$. Sabe-se que $\sqrt{Var(X)} = \sqrt{\lambda} = 1.732$ logo $\lambda \simeq 3$

$$P(X \leq 2) \simeq F_{Po(3)}(2) = 0.4232$$

3. X = tempo (em minutos) que cada funcionário despende a atender um utente
$X \sim Exp(\lambda)$. Sabe-se que $\sqrt{Var(X)} = \sqrt{\lambda^{-2}} = \lambda^{-1} = 10$, logo $\lambda = 0.1$

(a)

$$\begin{aligned} P(X \geq 8+4|X>4) &= P(X \geq 8) \quad \text{(Prop. falta de memória)} \\ &= \int_8^{+\infty} 0.1e^{-0.1x}dx \\ &= e^{-0.8} \simeq 0.4493 \end{aligned}$$

(b) Y = número de utentes que demoram menos de 8 minutos a serem atendidos em 6 escolhidos ao acaso
$Y \sim Bin(n=6, p)$, onde $p = P(X<8) = 1 - P(X \geq 8) \simeq 0.5507 \simeq 0.55$

$$P(Y \geq 2) = P(6 - Y \leq 6-2) = P(W \leq 4) = F_W(4) = 0.9308$$

onde $W = 6 - Y \sim Bin(n = 6, p = 1 - 0.55 = 0.45)$ estando esta distribuição tabelada. Ou de forma equivalente,

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - \sum_{y=0}^{1} \left(\begin{array}{c} 6 \\ y \end{array} \right) 0.55^y (1 - 0.55)^{6-y} \simeq 0.9308$$

(c) Seja $T = \sum_{i=1}^{35} X_i$ o tempo total de atendimento (em minutos) de 35 utentes, onde X_i são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas ($X_i \sim Exp(\lambda = 0.1)$). Uma vez que $E(X_i) = 10 < \infty$ e $Var(X_i) = (0.1)^{-2} = 100 < \infty$, pelo Teorema do Limite Central pode afirmar-se que

$$\frac{\sum_{i=1}^{35} X_i - 35 \times 10}{\sqrt{35 \times 100}} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Recordando que 4h correspondem a 240 minutos

$$\begin{aligned} P(T < 240) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{35} X_i - 350}{\sqrt{3500}} < \frac{240 - 350}{\sqrt{3500}} \right) \\ &\simeq \Phi(-1.86) = 1 - \Phi(1.86) = 1 - 0.9686 = 0.0314 \end{aligned}$$

Logo não é razoável admitir que um funcionário possa atender 35 utentes em quatro horas. Mesmo que não fizesse nenhuma pausa entre atendimentos consecutivos, a probabilidade de isso acontecer é aproximadamente 0.0314

Grupo II

(a) A função probabilidade marginal de X é dada por

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \sum_{y=0}^{1} P(X = x, Y = y) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{3}, & x = 2, 4, 6 \\ 0, & c.c. \end{cases} \end{aligned}$$

i.e. $X \sim Unif\{2, 4, 6\}$

A função probabilidade marginal de Y é dada por

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= \sum_{x \in \{2,4,6\}} P(X = x, Y = y) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{3}, & y = 0 \\ \frac{2}{3}, & y = 1 \\ 0, & c.c. \end{cases} \end{aligned}$$

i.e. $Y \sim Bern(p = \frac{2}{3})$

(b)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x\in\{2,4,6\}} xP(X=x) = \frac{1}{3}\times(2+4+6) = 4\\
E(X^2) &= \sum_{x\in\{2,4,6\}} x^2P(X=x) = \frac{1}{3}\times(2^2+4^2+6^2) = \frac{56}{3}\\
Var(X) &= E(X^2)-E(X)^2 = \frac{56}{3}-16 = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Pela alínea anterior pode afirmar-se que:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{2}{3}\\
Var(Y) &= \frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}\\
\text{e} &\\
E(XY) &= \sum_{x\in\{2,4,6\}}\sum_{y=0}^{1} xyP(X=x,Y=y) = 1\times 2\times\frac{1}{12} + 1\times 4\times\frac{1}{3} + 1\times 6\times\frac{1}{4} = 3
\end{aligned}$$

Logo

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{3-4\times\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{8}{3}\times\frac{2}{9}}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \simeq 0.433$$

X e Y são v.a. dependentes já que $Corr(X,Y)\neq 0$. X e Y têm tendência para variar no mesmo sentido porque $Corr(X,Y)>0$. A dependência linear entre elas é moderada (0.433) pois o coeficiente de correlação está próximo de 0.5.

(c) A função de probabilidade condicionada de X dado $Y=0$ é

$$P(X=x|Y=0) = \frac{P(X=x,Y=0)}{P(Y=0)} = \begin{cases} 0.75, & x=2\\ 0.25, & x=6\\ 0, & c.c.\end{cases}$$

donde

$$E(X|Y=0) = \sum_x xP(X=x|Y=0) = 2\times 0.75 + 6\times 0.25 = 3 \neq E(X) = 4$$

Uma vez mais confirma-se que X e Y são v.a. dependentes

(d) $E(X-Y) = E(X)-E(Y) = 4-\frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

$Var(X-Y) = Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y) = \frac{8}{3}+\frac{2}{9}-2\times\frac{1}{3} = \frac{20}{9}$.