Probabilidades e Estatística

1º Teste – **Teste A** | 1º semestre – 2001/02

Duração: 1 hora e 30 minutos | 17/11/01 – 9 horas

RESOLUÇÃO ABREVIADA

Grupo I

1.

Acontecimento	**Probabilidade**
M=viver numa moradia	$P(M) = 0.05$
B=viver num prédio em banda	$P(B) = 0.20$
T=viver numa torre	$P(T) = 1 - P(M) - P(B) = 1 - 0.05 - 0.20$
R=ser alvo de programa de realojamento	
$R\|M$	$P(R\|M) = 0.02$
$R\|B$	$P(R\|B) = 0.03$
$R\|T$	$P(R\|T) = 0.10$

(a) Recorrendo à lei da probabilidade total tem-se

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R|M)P(M) + P(R|B)P(B) + P(R|T)P(T) \\ &= 0.02 \times 0.05 + 0.03 \times 0.20 + 0.10 \times 0.75 = 0.082 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(M|R) &= \frac{P(R|M)P(M)}{P(R)} \qquad \text{(Teo. Bayes)} \\ &= \frac{0.02 \times 0.05}{0.082} = 0.012 \end{aligned}$$

2. X=tempo de vida de um frigorífico (em anos)
$X \sim \mathcal{N}(\mu = 4.8, \sigma^2 = 1.3^2)$.

(a)

$$P(X \leq 2) = P\left(\frac{X - 4.8}{1.3} \leq \frac{2 - 4.8}{1.3}\right) = \Phi(-2.15) = 0.0158$$

(b) t=duração da garantia do frigorífico

$$\begin{aligned} P(X \leq t) = 0.005 \quad &\Leftrightarrow \quad P\left(\frac{X - 4.8}{1.3} \leq \frac{t - 4.8}{1.3}\right) = 0.005 \\ &\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{t - 4.8}{1.3}\right) = 0.005 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{t - 4.8}{1.3} = \Phi^{-1}(0.005) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{t - 4.8}{1.3} = -2.5758 \\ &\Leftrightarrow \quad t = 1.4515 \end{aligned}$$

(c) Y=nº frigoríficos cuja duração de vida é superior a 8 anos, em 10 seleccionados ao acaso com reposição
$Y \sim Bin(n = 10, p = P(X > 8))$, onde

$$p = P(X > 8) = 1 - \Phi\left(\frac{8 - 4.8}{1.3}\right) = 1 - \Phi(2.46) = 0.0069$$

Logo

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0.0069^0 (1 - 0.0069)^{10-0} = 0.0669$$

Grupo II

(a)

$$\begin{cases} \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} P\left(X = x, Y = y\right) = 1 \\ E\left(XY\right) = \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} xyP\left(X = x, Y = y\right) = 0.05 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.75 + 0.05 + a + b = 1 \\ 1 \times 1 \times b = 0.05 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0.15 \\ b = 0.05 \end{cases}$$

(b) A função de probabilidade marginal de X e a de Y são dadas por:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \sum_{y=0}^{1} P\left(X = x, Y = y\right) = \begin{cases} 0.75 + 0.05 = 0.80, & x = 0 \\ 0.15 + 0.05 = 0.20, & x = 1 \\ 0, & c.c. \end{cases} \\ P(Y = y) &= \sum_{x=0}^{1} P\left(X = x, Y = y\right) = \begin{cases} 0.75 + 0.15 = 0.90, & y = 0 \\ 0.05 + 0.05 = 0.10, & y = 1 \\ 0, & c.c. \end{cases} \end{aligned}$$

(c) A função de probabilidade condicional de Y dado $X = 1$ é

$$P(Y = y|X = 1) = \frac{P\left(X = 1, Y = y\right)}{P\left(X = 1\right)} = \begin{cases} \frac{0.15}{0.20} = 0.75, & y = 0 \\ \frac{0.05}{0.20} = 0.25, & y = 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

(d) $X \sim Ber(p = 0.2)$ logo $E[X] = 0.2$ e $Var[X] = 0.2 \times (1 - 0.2) = 0.16$;
$Y \sim Ber(p = 0.1)$ logo $E[Y] = 0.1$ e $Var[Y] = 0.1 \times (1 - 0.1) = 0.09$.
Ou, em alternativa:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x=0}^{1} xP(X=x) = 0.80 \times 0 + 0.20 \times 1 = 0.20 \\
E[X^2] &= \sum_{x=0}^{1} x^2 P(X=x) = 0.80 \times 0^2 + 0.20 \times 1^2 = 0.20 \\
Var[X] &= E[X^2] - E^2[X] = 0.20 - 0.20^2 = 0.16 \\
E[Y] &= \sum_{y=0}^{1} yP(Y=y) = 0.90 \times 0 + 0.10 \times 1 = 0.10; \\
E[Y^2] &= \sum_{y=0}^{1} y^2 P(Y=y) = 0.90 \times 0^2 + 0.10 \times 1^2 = 0.10 \\
Var[Y] &= E[Y^2] - E^2[Y] = 0.10 - 0.10^2 = 0.09 \\
E[XY] &= \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} xyP(X=x, Y=y) = 0.05
\end{aligned}
$$

Logo

$$
Corr(X,Y) = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}} = \frac{0.05 - 0.20 \times 0.10}{\sqrt{0.16 \times 0.09}} = 0.25
$$

Uma vez que $Corr(X,Y) \neq 0$ conclui-se que X e Y não são v.a. independentes. Como $Corr(X,Y) > 0$, X e Y têm tendência a variar no mesmo sentido. Para além disso, como o valor do coeficiente de correlação é baixo (0.25) não há uma associação linear clara entre X e Y.

Probabilidades e Estatística

1º Teste – **Teste B** | 1º semestre – 2001/02

Duração: 1 hora e 30 minutos | 17/11/01 – 11 horas

RESOLUÇÃO ABREVIADA

Grupo I

1.

Acontecimento	**Probabilidade**
F=indivíduo sexo feminino	$P(F) = 0.66$
M=indivíduo sexo masculino	$P(M) = 1 - P(F) = 0.34$
S=indivíduo que entrou em 1ł opção	
$S\|F$	$P(S\|F) = 0.80$
$S\|M$	$P(S\|M) = 0.40$

(a)

$$\begin{aligned} P(\bar{S}) &= P(\bar{S}|M)P(M) + P(\bar{S}|F)P(F) \qquad \text{(Lei Prob. Total)} \\ &= (1 - P(S|F))\,P(M) + (1 - P(S|F))\,P(F) \\ &= (1 - 0.40) \times 0.34 + (1 - 0.80) \times 0.66 \\ &= 0.336 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(F|S) &= \frac{P(S|F)P(F)}{P(S)} \qquad \text{(Teo. Bayes)} \\ &= \frac{P(S|F)P(F)}{1 - P(\bar{S})} \\ &= \frac{0.80 \times 0.66}{1 - 0.336} \\ &= 0.795 \end{aligned}$$

(c) (i) X= nº alunos do sexo feminino em 20 alunos seleccionados ao acaso, sem reposição, de uma população de 250 alunos dos quais 66% são do sexo feminino
$X \sim HG(N = 250, M = 250 \times 0.66 = 165, n = 20)$

$$\begin{aligned} E[X] &= 20 \times \frac{165}{250} = 13.2 \\ Var[X] &= 20 \times \frac{165}{250} \times \frac{250 - 165}{250} \times \frac{250 - 20}{250 - 1} = 4.15 \end{aligned}$$

(ii) Y= nº alunos do sexo masculino em 20 alunos seleccionados ao acaso, sem reposição, de uma população de 250 alunos dos quais 66% são do sexo feminino
$Y \sim HG(N = 250, M = 250 \times 0.34 = 85, n = 20)$
Como a condição de aproximação da distribuição hipergeométrica pela distribuição

binomial é satisfeita ($\frac{20}{250} = 0.08 < 0.1$), $Y \overset{aprox}{\sim} Bin(n = 20, p = 0.34)$, pelo que

$$\begin{aligned} P(Y \geq 4) &= 1 - P(Y \leq 3) = 1 - F_Y(3) \\ &\simeq 1 - F_{Bin(20,0.34)}(3) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{3} \binom{20}{i} 0.34^i (1 - 0.34)^{20-i} \\ &= 1 - 0.0444 = 0.9556 \end{aligned}$$

Ou, usando a tabela da função de distribuição da v.a. $Bin(n = 20, p = 0.35)$,

$$P(Y \geq 4) \simeq 1 - F_{Bin(20,0.35)}(3) = 1 - 0.0535 = 0.9465$$

2. X=resistência ao choque de certo tipo de mosaico
$X \sim \mathcal{N}(\mu = 3, \sigma^2 = 0.5^2)$

(a)

$$\begin{aligned} P(2.5 < X < 3.5) &= P\left(\frac{2.5 - 3}{0.5} < \frac{X - 3}{0.5} \leq \frac{3.5 - 3}{0.5}\right) \\ &= P\left(\frac{2.5 - 3}{0.5} < \frac{X - 3}{0.5} \leq \frac{3.5 - 3}{0.5}\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= 0.8413 - 0.1587 = 0.6826 \end{aligned}$$

(b) Z^* = número de mosaicos cuja resistência é superior a 3.5, em 10 seleccionados ao acaso de um grande lote.
Assumindo que a dimensão do lote é substancialmente maior que a dimensão da amostra, a selecção de 10 mosaicos com reposição conduz a resultados aproximadamente iguais aos que se obteria sem reposição. Isto é, pode usar-se a v.a.
Z = número de mosaicos cuja resistência é superior a 3.5, em 10 seleccionados ao acaso com reposição de um grande lote.

$$Z \sim Bin(n = 10, p = P(X > 3.5))$$

onde

$$\begin{aligned} p &= P(X > 3.5) = 1 - P(X \leq 3.5) \\ &= 1 - P\left(\frac{X - 3}{0.5} \leq \frac{3.5 - 3}{0.5}\right) \\ &= 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 \end{aligned}$$

Pretende-se

$$\begin{aligned} P(Z \geq 9) &= P(Z = 9) + P(Z = 10) = \sum_{i=9}^{10} \binom{10}{i} 0.1587^i (1 - 0.1587)^{10-i} \\ &= 5.47 \times 10^{-7} \simeq 0.0 \end{aligned}$$

Ou, usando a tabela da função de distribuição da v.a. $Bin(n = 10, p = 0.15)$,

$$P(Z \geq 9) \simeq 1 - F_{Bin(10,0.15)}(8) = 1 - 1.0 = 0.0$$

Grupo II

(a) A função probabilidade marginal de X é dada por

$$\begin{aligned} P(X=x) &= \sum_{y\in\{-2,0,2\}} P(X=x, Y=y) \\ &= \begin{cases} 0.3, & x=1,2 \\ 0.40, & x=3 \\ 0, & \text{c.}c. \end{cases} \end{aligned}$$

donde a função de distribuição marginal de X será

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X\le x) = \sum_{k\le x} P(X=k) \\ &= \begin{cases} 0, & x<1 \\ 0.3, & 1\le x<2 \\ 0.6, & 2\le x<3 \\ 1, & x\ge 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=1}^{3} xP(X=x) = 1\times 0.3 + 2\times 0.3 + 3\times 0.4 = 2.1 \\ E[X^2] &= \sum_{x=1}^{3} x^2P(X=x) = 1^2\times 0.3 + 2^2\times 0.3 + 3^2\times 0.4 = 5.1 \\ Var[X] &= E[X^2] - E^2[X] = 5.1 - 2.1^2 = 0.69 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{y\in\{-2,0,2\}} yP(Y=y) = -2\times 0.2 + 0\times 0.4 + 2\times 0.4 = 0.40 \\ E[Y^2] &= \sum_{y\in\{-2,0,2\}} y^2P(Y=y) = (-2)^2\times 0.2 + 0^2\times 0.4 + 2^2\times 0.4 = 2.40 \\ Var[Y] &= E[Y^2] - E^2[Y] = 2.4 - 0.4^2 = 2.24 \\ E[XY] &= \sum_{x=1}^{3}\sum_{y\in\{-2,0,2\}} xyP(X=x, Y=y) = 1.0 \\ Cov(X,Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] = 1.0 - 2.1\times 0.4 = 0.16 \\ Corr(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}} = \frac{0.16}{\sqrt{0.69\times 2.24}} = 0.129 \end{aligned}$$

X e Y são v.a. dependentes já que $Corr(X,Y)\neq 0$. X e Y têm tendência para variar no mesmo sentido porque $Corr(X,Y)>0$. A dependência linear entre elas é fraca (0.129) pois o coeficiente de correlação está próximo de zero.

(c) A função de probabilidade condicionada de X dado $Y=2$ é

$$\begin{aligned} P(X=x|Y=2) &= \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} \\ &= \begin{cases} 0.25, & x=1,2 \\ 0.50, & x=3 \\ 0, & \text{c.}c. \end{cases} \end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
E[X|Y=2] &= \sum_{x=1}^{3} xP(X=x|Y=2) = (1+2)\times 0.25 + 3\times 0.5 = 2.25 \\
E[X^2|Y=2] &= \sum_{x=1}^{3} x^2P(X=x|Y=2) = (1^2+2^2)\times 0.25 + 3^2\times 0.5 = 5.75 \\
Var[X|Y=2] &= E[X^2|Y=2] - E^2[X|Y=2] = 5.75 - 2.25^2 = 0.6875
\end{aligned}
$$