# Soluções das Provas do ano lectivo de 2003/004 [1]

**Exame de 10/07/004**

**I**

**1. a)** 0.518. **1. b) i)** 0.4754 **1. b) ii)** 0.8717.

**1. c)** $X \sim Geométrica(p \approx 0.482)$, $E(X) = 2.075$.

**2.** $\sigma \approx 545.59$ horas.

**II**

**a)** $Corr\,(X,Y) = \rho_{X,Y} = 0.1166$ pelo que as variáveis $X$ e $Y$ estão positivamente correlacionadas. **b)** $E(X|Y=1) = 0.4$.

**III**

**1. a)** Verificar que $E(S^2) = \sigma^2$.

**1. b)** $IC_{99\%}\,(\mu) = (22.447, 25.313)$.

**1. c)** $H_0 : \mu = 24 \quad (H_0 : \mu \geq 24) \quad vs. \quad H_1 : \mu < 24$ , $t_{obs} = -0.272 \notin R_{0.05} = (-\infty, -1.833)$; não rejeitar $H_0$ para $\alpha \leq 0.05$; valor-$p \in (0.30, 0.40)$, não rejeitar $H_0$ para $\alpha \leq 30\%$ e rejeitar $H_0$ para $\alpha \geq 40\%$, pelo que $H_0$ não é rejeitada para os níveis de significância usuais.

**2. a)** Pretende-se testar $H_0 : X \sim F_X(x) = (1 - e^{-x})^{10} \quad vs. \quad H_1 : X$ não tem essa distribuição $F_X(x)$; $q_{obs} = 4.8907 \notin R_{0.10} = (7.779, +\infty)$; não rejeitar $H_0$ para $\alpha \geq 0.10$.

**IV**

**a)** $\hat{\beta}_0 = 52.10$, estima-se que a média da pressão sanguínea à nascença, para crianças do sexo masculino, seja de 52.10 (se a recta estimada também for adequada para as idades inferiores a 5 anos); $\hat{\beta}_1 = 1.70$, estima-se que em cada ano a pressão sanguínea média, para rapazes entre os 5 e 13 anos aumente de 1.70.

**b)** $IC_{99\%}\,(E(Y|x=10)) = (67.115, 71.085)$.

**c)** $R^2 \approx 0.877$; como 85% da variabilidade de $Y$ é explicada pela recta estimada, podemos considerá-la um ajustamento adequado.

**Exame de 24/06/004**

**I**

**1. a)** 0.0082. **1. b)** 0.0072.

[1] Secção de Estatística e Aplicações, IST, Setembro de 2004

**3. b)** $P(X \geq 17) = 1 - \sum_{x=0}^{16} \binom{120}{x} (\frac{1}{6})^x (\frac{5}{6})^{120-x}$.

**3. c)** $P(X \geq 17) \approx 0.8051$ (com correcção de continuidade), $P(X \geq 17) \approx 0.8365$ (sem correcção de continuidade); como $n = 120$ é grande espera-se que a aproximação seja boa, quer se aplique ou não a correcção de continuidade.

**II**

**a)** $f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 < x < 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$, $Y \stackrel{d}{=} X$.

**b)** $Corr\,(X,Y) = \rho_{X,Y} = -0.09(09) < 0$, pelo que as variáveis $X$ e $Y$ estão negativamente correlacionadas, apresentando um grau de associação linear quase nulo.

**III**

**1. a)** $\hat{\lambda} = \bar{x} = 0.11$, $P(\widehat{X > 10}) = 0.3328$.

**1. b)** $H_0 : \mu = 10 \quad (H_0 : \mu \leq 10) \quad vs. \quad H_1 : \mu > 10$ , $t_{obs} = -1.301 \notin R_{0.05} = (1.6449, +\infty)$; não rejeitar $H_0$ para $\alpha \leq 0.05$.

**2. b)** $q_{obs} = 3.1 \notin R_{0.05} = (9.488, +\infty)$, não rejeitar a hipótese da v.a. $X$ ter a função de distribuição indicada pelo metereologista para $\alpha \leq 0.05$; valor-$p \in (0.5, 0.6)$, não rejeitar a hipótese para $\alpha \leq 50\%$ e rejeitar para $\alpha \geq 60\%$.

**IV**

**a)** $IC_{90\%}\,(\beta_1) = (324.9769, 583.3405)$. Dado que $\beta_1 = 0 \notin IC_{90\%}\,(\beta_1)$, será de rejeitar a hipótese $H_0 : \beta_1 = 0$ (modelo não adequado) para $\alpha = 10\%$.

**b)** $IC_{90\%}\,(E(Y|x = 0.55)) = (114.9670, 303.0398)$.

**c)** $R^2 \approx 0.6235$; como 62.35% da variabilidade de $Y$ é explicada pela recta estimada, podemos considerá-la, quando muito, um ajustamento razoável.

## Teste de 15/05/004 às 9h (Teste A)

**I**

**1. a)** 0.7(6). **1. b)** $\frac{17}{23} \approx 0.739$.

**2** $X \sim Geométrica(p = 0.1)$, $P(X \geq 3) = 0.81$.

**3. b)** $Y \sim Binomial(n = 50, p = 0.195)$, $P(Y \geq 10) = 1 - \sum_{y=0}^{9} \binom{50}{y} 0.195^y 0.805^{50-y} \approx 0.5359$.

**II**

**a)** $P(X=x)=\begin{cases} 0.27, & x=0 \\ 0.48, & x=1 \\ 0.25, & x=2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$ , $\quad Moda(X)=Mediana(X)=1.$

**b)** $Corr\,(X,Y)=\rho_{X,Y}=-0.039<0$ pelo que as variáveis $X$ e $Y$ estão negativamente correlacionadas, apresentando um grau de associação linear quase nulo.

**c)** $P(X=x|Y=1)=\begin{cases} \frac{23}{48}, & x=0,2 \\ \frac{2}{48}, & x=1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$ .

## Teste de 15/05/004 às 11h (Teste B)

**I**

**1. a)** 0.51. **1. b)** $\frac{12}{17}\approx 0.706.$

**2. a)** $P(X>15)=0.1587.$

**2. b)** $Y\sim Binomial(n=6,p=0.1587),\ P(Y=10)=0.006734.$

**3. a)** $X\sim Poisson(\lambda=18),\ P(16\leq X\leq 25)=0.6687.$

**3. b)** $\approx 0.684$ (com correcção de continuidade), $\approx 0.6313$ (sem correcção de continuidade); pode-se considerar que o valor obtido é uma boa aproximação, devido ao facto de $\lambda>5$.

**II**

**a)** $P\,(X=2,Y=1)=0.15.$

**b)** $E(X)=E(X|Y=1)=1$, mas pelo facto de serem iguais não se pode concluir que as variáveis sejam independentes.

**c)** $P\,(X>Y)=0.22.$ **d)** $T=75X+450Y$, $E(T)=660$ euros e $\sqrt{Var(T)}\approx 293.94$ euros.

## Exame de 07/02/004

**I**

**1. a)** 0.35. **1. b)** $\approx 0.8154.$

**2. a)** $X\sim Hipergeom(N=10000,M=100,n=500)$, $P\,(X\geq 2)=1-\sum_{x=0}^{1}\frac{\binom{100}{x}\binom{9900}{500-x}}{\binom{10000}{500}}.$

**2. b)** $X\sim Binomial(500,0.01),\ P\,(X\geq 2)=0.9602.$

**2. c)** $P\,(X\geq 2)\approx 0.9418$; Não é relevante.

**II**

**a)** $P(X > 0.5) = 0.625$. **b)** $P(X > 0.5|Y = 0.75) = 0.6$; $X$ e $Y$ são v.a. dependentes.

**III**

**1. a)** $IC_{95\%}(\mu_1 - \mu_2) = ]-34.72, -27.28[$.

**1. b)** $H_0 : \mu_1 = 280$ $(H_0 : \mu_1 \leq 280)$ $vs.$ $H_1 : \mu_1 > 280$ , $t_{obs} = 7.5 \in R_{0.01} = (2.374, +\infty)$; rejeitar $H_0$ para $\alpha \geq 0.01$.

**2. b)** $q_{obs} = 7.628$; valor-$p \in (0.05, 0.075)$, não rejeitar a hipótese de que o número de óvulos fecundados por experiência tem distribuição $Binomial(6, p)$, para $\alpha \leq 5\%$ e rejeitar essa hipótese para $\alpha \geq 7.5\%$.

**IV**

**a)** $\hat{\beta}_0 = -47698.11$, $\hat{\beta}_1 = 37075.47$; $\widehat{E(Y|x = 7)} = 211830.18$.

**b)** $R^2 \approx 0.85$, o modelo de regressão linear explica cerca de 85% da variabilidade de $Y$.

**c)** $IC_{90\%}(\beta_1) = ]16004.26, 58146.68[$. Dado que $\beta_1 = 0 \notin IC_{90\%}(\beta_1)$, será de rejeitar a hipótese $H_0 : \beta_1 = 0$ (modelo não adequado) para $\alpha = 10\%$.

## Exame de 17/01/004

**I**

**1. a)** 0.053. **1. b)** $\approx 0.075$. **1. c)** $\approx 0.094$

**2. a)** 0.2. **2. b)** 0.7939. **2. c)** 0.0009.

**II**

**a)** $P(X = 2, Y = 120) = 0.35$.

**b)** $E(Y) = 96\, seg$ e $E(Y|X = 2) \approx 101.54\, seg$; como $E(Y) \neq E(Y|X = 2)$ pode concluir-se que as variáveis $X$ e $Y$ não são independentes.

**III**

**1. b)** $\lambda = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

**2. a)** $IC_{95\% aprox}(p) = ]0.2522, 0.3078[$ **2. b)** O intervalo de confiança pode ser usado para tomar uma decisão no teste das hipóteses $H_0 : p = p_0$ $vs.$ $H_1 : p \neq p_0$, quando se usar a estatística de teste $T = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \sim N(0, 1)$, da seguinte forma: se $p_0 \in IC_{95\% aprox}(p)$ não será de rejeitar $H_0$ para $\alpha = 5\%$; se $p_0 \notin IC_{95\% aprox}(p)$ será de rejeitar $H_0$ para $\alpha = 5\%$.

**3. a)** $E(X_i) = np_i = 500 \times \frac{1}{5} = 100$, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Como $q_{obs} = 20 \in R_{0.01} = (13.28, +\infty)$ será de rejeitar a hipótese que há igual apetência nas 5 sub-regiões para $\alpha = 1\%$.

**3. b)** Valor-$p = 0.0005$, rejeitar a hipótese que há igual apetência nas 5 sub-regiões para

$\alpha \geq 0.05\%$ e não rejeitar essa hipótese para $\alpha < 0.05\%$.

**IV**

**1. a)** $\widehat{E(Y|x)} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x = -75.248 + 0.858x$; $\hat{\sigma}^2 = 27.426$.

**2. b)** Pretende-se testar $H_0 : \beta_1 = 0 \quad vs. \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$, como $t_{obs} = 10.094 \in R_{0.05} = (-\infty, -2.101) \cup (2.101, +\infty)$ será de rejeitar $H_0$ para $\alpha = 5\%$, logo o modelo parece ser adequado; $R^2 \approx 0.85$, o modelo de regressão linear explica cerca de 85% da variabilidade de $Y$.

## Teste de 15/11/003 às 9h (Teste A)

**I**

**1. a)** 0.22. **1. b)** $\approx 0.2307$

**2. a)** 166.449. **2. b)** 0.3264. **2. c)** 0.3483.

**II**

**a)** $E(X) = 1$ e $Var(X) = 0.7$.

**b)** Dado que $P(Y = 1|X = 2) = \max_y P(Y = y|X = 2)$, conclui-se que para um aluno com assiduidade superior a 90% será mais provável uma classificação entre 14 e 18.

**c)** $E(Y|X = 1) = 0.16(6)$.

**d)** $Corr(X, Y) = \rho_{X,Y} \approx 0.675 > 0$ pode concluir-se que as v.a. são dependentes e estão positivamente associadas apesar do grau de associação linear não ser elevado, i.e há tendência para variarem no mesmo sentido pelo que o sucesso escolar tenderá a aumentar com a assiduidade.

## Teste de 15/11/003 às 11h (Teste B)

**I**

**1. a)** 0.136. **1. b)** 0.625.

**2. a)** $X \sim Normal\left(\mu = 752.9, \sigma^2 = 400\right)$.

**2. b)** $Y \sim Binomial(20, 0.95)$, $P(Y \geq 10) = 1$; $E(Y) = 19$.

**2. c)** Seja T a v.a. que representa o preço (em euros) da VAP para o referido cliente,

$$F_T(t) = \begin{cases} P(X \leq x \,|X < 720) = \frac{F_X(x)}{F_X(720)} = 20F_X(x), & t < 720 \, e \, x = t \\ 1, & t \geq 720 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{20}{\sqrt{2\pi 400}} \exp\left(-\frac{1}{800}(t-752.9)\right)^2, & t < 720 \\ 0, & t \geq 720 \end{cases}$$

**II**

**a)** $E(X) = 0.2$ e $Var(X) = 0.18$. **b)** $a = 0.18$, $b = 0.005$ e $c = 0.805$

**c)** $Var(Y|X = 2) = 1 \neq Var(Y) = 0.18$, pelo que se pode concluir que $X$ e $Y$ são dependentes.

**d)** $Corr(X, Y) = \rho_{X,Y} = 0.8(8) > 0$ pode concluir-se que as v.a. são dependentes e estão positivamente associadas com um grau de associação linear elevado.