Soluções de Exames/Testes de PE
(LEEC+LEQ+LQ+LEBL)
$1^{\underline{o}}$ Semestre 2004/05

$1^{\underline{o}}$ Teste - 05/11/2004

I

a) classe 'pequeno': $X \in (0, 2.33]$, classe 'médio': $X \in (2.33, 3.54]$ e classe 'grande': $X \in (3.54, +\infty)$.

b) $Z = \frac{X-0.3}{0.8}$; $f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \left.\frac{dF_X(x)}{dx}\right|_{x=3+0.8z} \times \left|\frac{dx}{dz}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}z^2)$.

II

1. a) $a = 1/8$, $b = 1/16$, $c = 3/8$.

1. b) $P(Y = 1|X = 1) = 1/2$.

1. c) $E(X) = E(E(X|Y)) \Rightarrow E(X|Y = 2) = 13/8$.

2. a) Z = número de artigos da filial 1 em 10 artigos extraídos. $E(Z)$ = Moda(Z) = Mediana$(Z) = 5$. A unimodalidade, conjugada com a simetria da distribuição de Z, justificam essa coincidência de valores.

2. b) W = número de artigos extraídos até surgir o primeiro sem defeito ($X = 0$). $P(W > 5 + 10 \mid W > 5) = (13/16)^{10} = P(W > 10)$. Concretização da falta de memória da distribuição Geométrica.

$1^{\underline{o}}$ Exame / $2^{\underline{o}}$ Teste - 13/01/2005

I

1. a) $C =$ 'cliente ter acidentes num ano'; $P(C) = 0.15$.

1. b) $A =$ 'cliente de risco alto'; $P(A|\overline{C}) \simeq 0.16$

2. a) $X_t \sim \text{Poisson}\,(3t)$; $P(X_{1/2} = 0) \simeq 0.22$.

2. b) $T_i \sim \text{Exponencial}\,(\lambda_i)$, $i\!=\!1,2$, $\lambda_1\!=\!1$, $\lambda_2\!=\!2$;
$P(T_1 > T_2) = \int_0^{+\infty} \int_0^{t_2} \lambda_1\lambda_2 \exp(-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2)\, dt_1 dt_2 = 2/3$.

II

1. $R =$ prejuízo do fabricante por eixo (em euros); $E(R) = 26.02$.

R	0	0.5	1.0
$P(R\!=\!r)$	$P(\lvert D-4\rvert \leq 0.05)\!=\!0.3830$	0.1932	$P(\lvert D-4\rvert > 0.08)\!=\!0.4238$

2. $X_1 \sim \text{Bernoulli}\,(p)$, $p\!=\!0.75$; $P(X_2 = 1) = \sum_{x=0,1} P(X_1 = x)P(X_2 = 1|X_1 = x) = p$ e $P(X_2 = 0) = 1 - p \Rightarrow X_2 \sim \text{Bernoulli}\,(p)$. $E(X_1, X_2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) \simeq 0.5620$ $\Rightarrow Cov(X_1, X_2) = 0.0055$. X_1 e X_2 são identicamente distribuídas nos dois esquemas de tiragens (com ou sem reposição). Todavia, as duas variáveis são independentes ou dependentes consoante os esquemas de tirangens com ou sem reposição, respectivamente.

III

a) X = v.a. indicadora do carácter defeituoso de um voltímetro, $X \sim \text{Bernoulli}\,(p)$ $\Rightarrow T = \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{\text{aprox.}}{\sim} \text{Normal}(0,1)$ para n grande; $t_{\text{obs}} = 1.25 < 1.64 = F^{-1}_{N(0,1)}(0.95) \Rightarrow$ não se rejeita H_0 a esse nível de significância.

b) $X \sim \text{Binomial}(5,p)$, $Y \sim \text{Binomial}(5,p)$, X e Y independentes;
$P(\text{Erro tipo}\,2\,|\,p = 0.3) = P[(X \leq 2) \cup (X = 3 \cap Y < 2)|p = 0.3] = 0.9068$.

IV

1. a) $T \sim \text{Exponencial}(1/\lambda)$; $\widehat{p} = \exp(-150/\widehat{\lambda})$ é o EMV de $p = P(T \geq 150)$ pela propriedade de invariância do EMV, $\widehat{\lambda} = \overline{T}$, de λ.

1. b) $H_0 : T \sim \text{Exponencial}(1/\lambda)$; $\widehat{\lambda}_0 = 220$; $q_{\text{obs}} \simeq 38.94$; valor-p $= P(Q \geq 38.94|H_0) <$ $0.0005 \Rightarrow$ Rejeita-se H_0.

2. a) $\widehat{y} \equiv \widehat{E(Y)} = 2985.19 - 7.63\,x$; IC a 99% para $E(Y|x = 290) = (677.36, 867.62)$.

2. b) $H_0 : \beta_1 = 0$; $t_{obs} = -3.94$; valor-p $= P(|T| \geq 3.94|H_0) \in (0.002, 0.01)$; Deve-se rejeitar H_0 para $\alpha \geq 0.01$ (x influencia significativamente Y) e aceitar H_0 para $\alpha \leq 0.002$.

$2^{\underline{o}}$ Exame / $2^{\underline{o}}$ Teste - 01/02/2005

I

1. E = 'aluno escreve mensagem', V = 'servidor envia mensagem', R = 'aluna recebe mensagem', $P(\overline{E}|\overline{R}) \simeq 0.605$.

2. a) X = nº de ratos com doença congénita na amostra; $P(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{10} \frac{\binom{25}{x}\binom{75}{10-x}}{\binom{100}{10}} \simeq$ 0.771

2. b) $n = 8$ pois $P(X^\star \leq 4) = 0.9727$, onde $X^\star \sim \text{Binomial}\,(n, p = 0.25)$.

II

1. a) $P(X > 4|X \geq 1.5) \simeq 0.092$.

1. b) Y = nº de válvulas com $X \leq 1.5$ em 15 válvulas, $Y \sim \text{Binomial}\,(15, p = 0.6035)$, $P(Y = 10) \simeq 0.187$.

1. c) Z = nº de válvulas inspeccionadas até se encontrar a primeira com $X > 4$, $Y \sim$ Geométrica $(p = 0.0363)$, $E(Z) \simeq 27.55$, Mediana $(Z) = 19$.

2. a) $P(Y = y) = \sum_{x=y}^{\infty} P(X = x)P(Y = y|x = x) = \frac{e^{-0.01}0.01^y}{y!}$.

2. b) W = total de maremotos com onda gigante nessa região em 3 séculos, $P(W \leq 1) \simeq P(Z \leq (1 - 0.3)/\sqrt{0.3}) = 0.898$, onde $Z \sim \text{Normal}\,(0, 1)$.

III

1. a) $\widehat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_i X_i^2$ é o EMV de θ, $\sqrt{\frac{\pi\widehat{\theta}}{2}}$ é o EMV de $E(X)$ pela propriedade de invariância dos EMV.

1. b) Somente T_1 é centrado, sendo $E(T_2) = \theta\left(\frac{4}{n\pi} - \frac{1}{n} + 1\right)$.

2. $H_0 : p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}, \forall i, j$; valor-$p = P(Q > 5.128|H_0) \in (0.075, 0.100)$; Deve-se aceitar H_0 para $\alpha < 0.075$, i.e., não há evidência suficiente contra a hipótese de independência entre X e Y aos níveis de significância usuais.

IV

a) $Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{S_p^2(1/6 + 1/6)}} \sim t_{(10)}$; IC a 99% para $\mu_X - \mu_Y = (-6.463, 4.103)$.

b) Como $0 \in IC$ anterior, não se rejeita $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ ao nível de significância de 1% (ou menor), i.e., os métodos não diferem significativamente. A mesma conclusão é válida a qualquer valor usual para o nível de significância.

c) m = nº amostras de ar (em cada método) talque o erro máximo ϵ de estimação (margem de erro máximo) no IC a 90% para $\mu_X - \mu_Y$ é dado por $\epsilon = F^{-1}_{N(0,1)}(0.95)\sqrt{3^2(1/m + 1/m)} \simeq 0.7 \Rightarrow m = 99 \Rightarrow$ nº de amostras = 198.