Probabilidades e Estatística
Probabilidades, Erros e Estatística
Estatística

1º Teste – **Teste A** 2º semestre – 2002/03

Duração: 1 hora e 30 minutos 03/05/03 – 9 horas

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I *11 valores*

1. Num dado concurso o concorrente, para receber o seu prémio, tem de escolher uma de duas caixas idênticas. Em cada caixa encontram-se dois envelopes com a descrição do prémio em jogo. O concorrente opta por um envelope sem qualquer informação adicional sobre os prémios. Considere que na caixa A se encontra um envelope cujo prémio é um carro e outro envelope cujo prémio é uma aparelhagem e que ambos os envelopes da caixa B têm como prémio uma aparelhagem. Se o concorrente ganha uma aparelhagem, qual a probabilidade de no outro envelope da caixa escolhida se encontrar o carro como prémio. (2.5)

2. Uma fábrica tem como objectivo produzir no máximo 1% de peças defeituosas. De modo a controlar a qualidade da sua produção em série, de hora a hora são inspeccionadas 10 peças, retiradas ao acaso da produção dessa hora. Se for encontrada pelo menos uma peça defeituosa a produção é interrompida e o processo é examinado para detectar a causa da anomalia.

   (a) Se o processo de produção estiver a produzir 1% de peças defeituosas, qual a probabilidade de o processo ser interrompido desnecessariamente. (2.0)

   (b) Quantas peças deveriam ser inspeccionadas (em vez de 10) de modo que, com uma probabilidade de 0.95, o processo seja interrompido quando ocorre uma anomalia que conduz à produção de 10% de peças defeituosas? (1.5)

   (c) A fábrica trabalha 24h por dia, 5 dias por semana. Qual a probabilidade de mais de uma dúzia de peças testadas durante uma semana serem consideradas defeituosas? Considere que, tal como em (a), em cada hora são retiradas 10 peças da produção dessa mesma hora e que, de facto, são produzidas 1% de peças defeituosas. (3.0)

   (d) Considere que o tempo (em minutos) que uma peça leva a ser produzida é uma variável aleatória com distribuição exponencial cuja mediana é 1000 minutos. Determine o tempo médio de produção de uma peça. (2.0)

Grupo II *9 valores*

Considere que se retiram, sem reposição, duas bolas de uma urna que contém três bolas numeradas por 1, 2 e 3. Seja X o menor e Y o maior dos dois números observados.

(a) Mostre que o par aleatório (X, Y) tem a seguinte função de probabilidade conjunta: (2.0)

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} 1/3, & (x, y) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(b) Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y e interprete-o. (3.0)

(c) Deduza a função probabilidade condicionada do maior dos dois números observados se o menor desses números fôr 1. Identifique a distribuição em estudo e calcule o valor esperado e variância da variável aleatória considerada. (2.0)

ATENÇÃO! Se o seu curso é Licenciatura em Engenharia Química, Licenciatura em Química ou Licenciatura em Engenharia Biológica responda apenas à alínea (d), caso contrário responda apenas à alínea (e).

(d) (i) Verifique que $E(E(Y|X)) = 2E(X)$. (1.0)

(ii) Calcule $E(X + Y|X \leq 2)$. (1.0)

(e) Admita que sobre X e Y apenas conhecia $\mu_X = E(X)$, $\mu_Y = E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$ e $Cov(X, Y)$. Obtenha um valor aproximado de $E(XY)$ e $Var(XY)$. Compare os resultados obtidos com os valores exactos: $E(XY) = 11/3$ e $Var(XY) = 26/9$. (2.0)

Sugestão: Seja $A = f(X, Y)$, então

$$
\begin{aligned}
E(f(X,Y)) &\approx f(\mu_X, \mu_Y) + \frac{Var(X)}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\right)_{(\mu_X,\mu_Y)} + \frac{Var(Y)}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\right)_{(\mu_X,\mu_Y)} \\
&\quad + Cov(X,Y)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y}\right)_{(\mu_X,\mu_Y)}, \\
Var(f(X,Y)) &\approx Var(X)\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2_{(\mu_X,\mu_Y)} + Var(Y)\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2_{(\mu_X,\mu_Y)} \\
&\quad + 2Cov(X,Y)\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{(\mu_X,\mu_Y)}\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_{(\mu_X,\mu_Y)}.
\end{aligned}
$$