Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

# ANÁLISE MATEMÁTICA IV

1º Teste

(LEIC, LEEC, LEM,LEGM, LEMAT, LEN)

*Justifique cuidadosamente todas as respostas.*

**Data:** 29/04/2006, 11h00
**Duração:** 1h30.

(2 val.) 1) Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2$, e considere $u_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$u_\alpha(x,y) = x^2 - y^2 - \alpha(x)y.$$

a) Determine a forma geral da função $\alpha$ por forma que $u_\alpha$ seja uma função harmónica.

b) Determine uma função harmónica conjugada de $u(x,y) = x^2 - y^2 - 3xy$.

**Resolução:**

**(a)** Dado que por hipótese $\alpha$ é de classe $C^2$, podemos concluir que $u_\alpha$ é de classe $C^2$ em $\mathbb{R}^2$ e como tal para que seja harmónica basta verificar em que casos se tem $\Delta u_\alpha = 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Assim,

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} = 2x - \alpha'(x)y \quad , \quad \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} = 2 - \alpha''(x)y$$

e

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial y} = -2y - \alpha(x) \quad , \quad \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} = -2$$

pelo que

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(x) = ax + b$$

para $a$ e $b$ constantes reais arbitrárias. Podemos então concluir que $u_\alpha$ é harmónica em $\mathbb{R}^2$ se e só se $\alpha(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

**(b)** Por definição, $u$ e a sua harmónica conjugada verificam as equações de Cauchy-Riemann. Como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad v(x,y) = \int (2x - 3y)dy = 2xy - \frac{3y^2}{2} + C(x)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad 2y + C'(x) = 2y + 3x \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{3x^2}{2} + C$$

Conclui-se

$$v(x.y) = 2xy - \frac{3y^2}{2} + \frac{3x^2}{2} + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

(2 val.) 2) Considere a função de variável complexa definida por:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}.$$

a) Determine o desenvolvimento em série de Laurent de $f$, válido na região $|z-1| > R$, indicando o valor de $R$.

b) **Utilize a alínea anterior** para determinar

$$\oint_\gamma f(z)\,dz,\ \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2006\},$$

onde a curva $\gamma$ é percorrida uma vez em sentido directo.

**Resolução:**

**(a)** A função $f$ é analítica em $\mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$, pelo que admitirá duas séries de Laurent em torno de $z_0 = 1$: uma convergente em $0 < |z-1| < 2$ e outra convergente em $|z-1| > 2$ Vamos então obter, como pedido, o desenvolvimento de Laurent convergente em $|z-1| > 2$, ou seja, convergente em $\frac{2}{|z-1|} < 1$. Fazendo $w = z - 1$

$$\begin{aligned}
\frac{z}{(z-1)(z+1)} &= \frac{w+1}{w(w+2)} = \left(1 + \frac{1}{w}\right)\frac{1}{w(1+\frac{2}{w})} \\
&= \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{w^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-1)^{n+2}}
\end{aligned}$$

**(b)** Atendendo a que a curva $\gamma$ pertence à região de convergência da série determinada na alínea anterior, tem-se que

$$\oint_\gamma f(z)\,dz, = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i(1+0) = 2\pi i$$

(1.5 val.) 3) Determine o valor do integral

$$\oint_C \left(z^3 \cos\frac{1}{z} + \frac{\text{sen}\,(\pi z)}{z^2(z-1)}\right)\,dz,$$

em que $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$, é percorrida uma vez em sentido directo.

**Resolução:**

Definindo-se

$$f_1(z) = z^3 \cos\frac{1}{z} \quad \text{e} \quad f_2(z) = \frac{\text{sen}\,(\pi z)}{z^2(z-1)},$$

pela linearidade do integral, tem-se que

$$\oint_C \left(z^3 \cos\frac{1}{z} + \frac{\text{sen}\,(\pi z)}{z^2(z-1)}\right)\,dz = \oint_C f_1(z)\,dz + \oint_C f_2(z)\,dz$$

A função $f_1$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, e é fácil de verificar que $0 \in \text{int}\,\gamma$. Pelo desenvolvimento em série de Laurent em torno de $z_0 = 0$

$$f_1(z) = z^3\Big(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \ldots\Big) = z^3 - \frac{z}{2} + \frac{1}{4!z} - \frac{1}{6!z^3} + \ldots$$

conclui-se que a singularidade é essencial e Res $(f_1, 0) = \frac{1}{4!}$. Assim

$$\oint_C f_1(z)\, dz = \frac{\pi i}{12}$$

A função $f_2$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, e é fácil de verificar que $0 \in \operatorname{int} \gamma$ e que $1 \notin \operatorname{int} \gamma$. Dado que

$$\lim_{z\to 0} z f_2(z) = -\pi$$

conclui-se que a singularidade 0 é um polo simples e Res $(f_2, 0) = -\pi$. Assim

$$\oint_C f_1(z)\, dz = -2\pi^2 i$$

Finalmente

$$\oint_C \left( z^3 \cos\frac{1}{z} + \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{z^2(z-1)} \right) dz = \frac{\pi i}{12} - 2\pi^2 i$$

(2 val.) 4) Calcule o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\, dx$$

através do teorema dos resíduos.

**Resolução:**

Considere-se a função complexa

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4}$$

e para $R \in \mathbb{R}^+$, a curva

$$C_R = I_R \cup S_R = \{z = x \in ]-R, R[\} \cup \{z = Re^{it}\,,\ t \in ]0, \pi[\}$$

A função $F$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-2i, 2i\}$, e é fácil de verificar que, para $R$ suficientemente grande se tem $2i \in \operatorname{int} C_R$ e que $-2i \notin \operatorname{int} C_R$. Dado que

$$\lim_{z\to 2i} (z-2i) F(z) = \frac{e^{-2}}{4i}$$

conclui-se que a singularidade $2i$ é um polo simples e Res $(F, 2i) = \frac{e^{-2}}{4i}$. Assim, por aplicação do Teorema dos resíduos, tem-se que

$$\oint_{C_R} F(z)\, dz = \frac{e^{-2}\pi}{2}$$

Por outro lado

$$\frac{e^{-2}\pi}{2} = \oint_{C_R} F(z)\, dz = \int_{I_R} F(z)\, dz + \int_{S_R} F(z)\, dz = \int_{-R}^{R} F(x)\, dx + \int_{S_R} F(z)\, dz$$

Fazendo $R \to \infty$ obtem-se

$$\frac{e^{-2}\pi}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx + \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} F(z)\, dz$$

Atendendo a que a função $\frac{1}{z^2+4}$ é analítica em $\{z \,:\, \mathrm{Im}\, z > 0\} \setminus \{2i\}$, e para $|z| = R \to \infty$

$$\Big|\frac{1}{z^2+4}\Big| \leq \frac{1}{R^2-4} \to 0$$

o Lema de Jordan permite concluir que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} F(z)\, dz = 0$$

Tem-se então que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx = \frac{e^{-2}\pi}{2}$$

o que implica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\, dx = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx = \frac{e^{-2}\pi}{2}$$

(1 val.) 5) Seja $f$ uma função inteira, isto é, analítica em $\mathbb{C}$, verificando $|f(z)| > \epsilon$, com $\epsilon > 0$. Mostre que $f$ é constante.

**Resolução:**

Considere-se $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Dado que $f$ é inteira, e $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, conclui-se que $g$ é uma função inteira. Por outro lado

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{1}{\epsilon} \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

o que implica que $g$ é limitada. O Teorema de Liouville permite comcluir que $g$ é constante o que implica, obviamente, que $f$ é constante.

**Resolva à sua escolha uma e uma só das seguintes questões:**

(1.5 val.) 6a) Esboçe o conjunto $T(A)$, sendo

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 1 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 2 \,\mathrm{e}\, 0 \leq \mathrm{Im}\, z \leq 2\pi\}$ e $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $T(z) = e^z$.

(b) $A = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$ e $T$ a transformação definida por $T(z) = \frac{i}{z+1}$.

(1.5 val.) 6b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + y\Big(\frac{t}{t^2+1}\Big) = \frac{\text{sen}\, 3t}{\sqrt{t^2+1}} \quad , \quad y(0) = 0,$$

indicando o intervalo máximo de existência da solução.

**Resolução:**

Trata-se de uma equação linear. Um factor integrante será

$$\mu(t) = e^{\int \frac{t}{t^2+1}\, dt} = \sqrt{t^2+1}$$

Multiplicando todos os termos da equação por $\mu(t)$, obtem-se

$$\frac{d}{dt}\Big(\sqrt{t^2+1}y\Big) = \text{sen}\, 3t \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\Big(-\frac{1}{3}\cos(3t) + c\Big)$$

Dado que $y(0) = 0$ tem-se $c = 1/3$, e a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{1}{3\sqrt{t^2+1}}\Big(1 - \cos(3t)\Big)$$

É fácil de concluir que o intervalo máximo de existência de solução é $\mathbb{R}$, visto que o domínio de diferenciabilidade da função $y$ é $\mathbb{R}$.