Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

2º Teste

(LEIC, LEM,LEGM, LEMAT, LEN)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 03/06/2006, 11h00
Duração: 1h30.

1) Considere a equação
$$(3y + 2xy^2) + (3x + 4x^2y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

a) Verifique que a equação admite um factor integrante da forma $\mu = \mu(xy)$ e determine-o.

b) Obtenha a solução (definida implícitamente) que verifica a condição inicial $y(1) = -1$.

Resolução;

a) Supondo que a equação admite um factor integrante da forma indicada, a equação
$$\mu(xy)(3y + 2xy^2) + \mu(xy)(3x + 4x^2y)y'(x) = 0$$
é exacta, pelo que
$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[\mu(xy)(3y + 2xy^2)\Big] = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\mu(xy)(3x + 4x^2y)\Big]$$
ou seja
$$x\mu'(xy)(3y + 2xy^2) + \mu(xy)(3 + 4xy) = y\mu'(xy)(3x + 4x^2y) + \mu(xy)(3 + 8xy)$$
Tendo-se então que
$$\frac{\mu'(xy)}{\mu(xy)} = -\frac{2}{(xy)^2}$$
Confirma-se então a existência de um factor integrante da forma indicada, e resolvendo a equação, obtem-se
$$\mu(xy) = \frac{1}{x^2y^2}$$

b) Multiplicando ambos os membros da equação pelo factor calculado em a), obtem-se a equação
$$\frac{3}{x^2y} + \frac{2}{x} + \Big(\frac{3}{xy^2} + \frac{4}{y}\Big)y'(x) = 0$$
que é por construção exacta. Conclui-se que existe $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por $\nabla\Phi = (\frac{3}{x^2y} + \frac{2}{x}, \frac{3}{xy^2} + \frac{4}{y})$ e tal que $\Phi(x, y) = C$ define implicitamente a solução da equação. Para calcular Φ,
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{3}{x^2y} + \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y) = -\frac{3}{xy} + 2\log|x| + c(y)$$
Por outro lado
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{3}{xy^2} + \frac{4}{y} \quad \Rightarrow \quad c'(y) = \frac{4}{y} \quad \Rightarrow \quad c(y) = 4\log|y| + K$$
Pelo que
$$\Phi(x, y) = -\frac{3}{xy} + 2\log|x| + 4\log|y| + K \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$
e a equação
$$-\frac{3}{xy} + 2\log|x| + 4\log|y| = C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$
define implicitamente a solução da equação. Visto $y(1) = -1$, $C = -3$ e
$$-\frac{3}{xy} + 2\log|x| + 4\log|y| = -3$$
define implicitamente a solução do PVI (note-se que o Teorema da função implícita é aplicável pois $\frac{3}{xy^2} + \frac{4}{y}\Big|_{(1,-1)} = -1 \neq 0$.)

2) Considere o sistema

$$x' = x + 2y + 1$$

$$y' = y + 2e^t$$

$$z' = z + w$$

$$w' = 2w$$

a) Escreva o sistema na forma $\frac{d}{dt}X(t) = AX(t) + B(t)$ e calcule e^{tA}.
b) Determine a solução do sistema que verifica a condição inicial $x(0) = y(0) = z(0) = w(0) = 0$.

Resolução:

a) Sendo a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

verifica-se facilmente que é da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sendo assim

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{A_2 t} \end{bmatrix}$$

Cálculo de $e^{A_1 t}$:

Note-se que

$$A_1 = Id_2 + N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que (calculando a matriz exponencial pela definição)

$$e^{A_1 t} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Cálculo de $e^{A_2 t}$:

Os valores próprios de A são 1 e 2, pelo que $A : 2$ é diagonalizável, i.e., $A = SDS^{-1}$ em que

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$e^{A_2 t} = Se^{Dt}S^{-1} = \begin{bmatrix} e^t & -e^t + e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$e^{At} = A = \begin{bmatrix} e^t & 2te^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & -e^t + e^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

b) Pela fórmula da variação das cobstantes a solução do PVI será

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} &= e^{At} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \\ w(0) \end{bmatrix} + e^{At} \int_0^t e^{-As} \begin{bmatrix} 1 \\ 2e^s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= e^{At} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{\cdot s} & -2se^{\cdot s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-s} & -e^{-s} + e^{-2s} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2e^s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} e^t(1 + 2t^2) - 1 \\ 2te^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3) Considere a equação

$$x^{(3)} + x'' + x' + x = 0.$$

a) Determine a sua solução geral.

b) Determine a solução da problema de valor inicial:

$$x^{(3)} + x'' + x' + x = 15e^{2t},\ x(0) = 0, x'(0) = x''(0) = 1.$$

Resolução:

a) Fazendo $Dx = x'$, a equação pode ser escrita na forma

$$\Big(D^3 + D^2 + D + 1\Big)x = 0$$

Tem-se então que o polinómio característico associado é

$$P(R) = R^3 + R^2 + R + 1 = (R-1)(R^2+1)$$

As suas raízes são -1 de multiplicidade 1 e $\pm i$ de multiplicidade 1, pelo que

$$e^{-t} \quad , \quad \operatorname{sen} t \quad , \quad \cos t$$

são soluções da equação diferencial, e

$$x(t) = Ae^{-t} + B\cos t + C\operatorname{sen} t$$

é a sua solução geral.

b) A solução da equação é da forma $x = x_G + x_p$, em que x_g é a solução geral da equação homogénea associada e x_p é uma solução particular da equação. Por a)

$$x_g(t) = Ae^{-t} + B\cos t + C\operatorname{sen} t$$

Para calcular x_p podemos utilizar o método dos coeficientes indeterminados. Assim, para $b(t) = 15e^{2t}$ o polinómio aniquilador é $P_A(D) = D - 2$. Aplicando este polinómio à equação diferencial obtem-se

$$(D-2)(D^3 + D^2 + D + 1)x = (D-2)(15e^{2t})$$

pelo que temos que resolver a equação homogenea

$$(D-2)(D+1)(D^2+1)x = 0$$

Facilmente se vê que a sua solução geral é

$$x(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{-t} + \gamma\cos t + \delta\operatorname{sen} t$$

pelo que a solução particular será da forma $w(t) = \alpha e^{2t}$. Teremos que determinar o coeficiente α de modo a que

$$w^{(3)} + w'' + w' + w = 15e^{2t}$$

ou seja

$$\Big(8\alpha + 4\alpha + 2\alpha + \alpha\Big)e^{2t} = 15e^{2t} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 1$$

conclui-se que $x_p(t) = e^{2t}$ e como tal

$$x(t) = Ae^{-t} + B\cos t + C\operatorname{sen} t + e^{2t}$$

é a solução geral da equação. Para determinar as constantes A, B e C vamos utilizar as condições iniciais. Assim

$$\begin{array}{lcll} x(0) = 0 & \Rightarrow & A + B + 1 = 0 & & A = -2 \\ x'(0) = 1 & \Rightarrow & -A + C + 2 = 1 & \Leftrightarrow & B = 1 \\ x''(0) = 1 & \Rightarrow & A - B + 4 = 1 & & C = -3 \end{array}$$

e

$$x(t) = -2e^{-t} + \cos t - 3\operatorname{sen} t + e^{2t}$$

é a solução pedida.

4) Determine a solução do seguinte problema:

$$u_t = u_{xx} + u, \qquad x \in]0,1[$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \cos \pi x + 5\cos 3\pi x + 8\cos 5\pi x.$$

Resolução:

Começamos por notar que a solução nula não pode ser solução do nosso problema, visto não verificar a condição inicial. Considere-se o problema de valores na fronteira

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + u\,, \quad x \in]0,1[\ , \ \ t > 0 \\ &u_x(0,t) = 0\,, \qquad u_x(1,t) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Vamos resolver pelo método de separação de variáveis. Sendo $u(x,t) = X(x)T(t)$ (note que visto a função u não poder ser identicamente nula, nem X nem T podem ser nulas.) a equação pode ser escrita na forma

$$XT' = X''T + XT \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T'}{T} = \frac{X'' + X}{X}$$

Como de costume, o primeiro membro da equação é uma função de t e o segundo membro é uma função de x, pelo que a igualdade só será verificada para todo (x,t) no seu domínio se ambas igualarem uma constante, i.e.,

$$T' = \lambda T \quad , \quad X'' + (1-\lambda)X = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Por outro lado, as condições de fronteira

$$u_x(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(0)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(0) = 0$$

e

$$u_x(1,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(1)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(1) = 0$$

onde usámos o facto de $T(t)$ não poder ser identicamente nula. Temos então dois problemas para resolver

$$\begin{cases} X'' + (1-\lambda)X = 0 \\ X'(0) = X'(1) = 0 \end{cases} \quad , \quad T' = \lambda T$$

Começando por resolver o problema de valores próprios (problema em X, trata-se de uma equação linear de coeficientes constantes cujo polinómio característico é

$$P(R) = R^2 + (1-\lambda) = 0$$

cujas raízes são $\pm\sqrt{\lambda - 1}$.

$\lambda = 1$ - Neste caso o polinómio característico tem 0 como raíz de multiplicidade 2. Assim $X(x) = Ax + B$ e pelas condições de fronteira

$$X'(0) = X'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

pelo que $\lambda = 1$ é valor próprio do problema associado à solução

$$X_0(x) = B$$

É óbvio que uma solução $X(x)$ constante nunca poder á satisfazer a condição inicial do problema.

$\lambda > 1$, $(\lambda - 1 = \mu^2)$, Neste caso o polinómio característico tem $\pm\mu$ como raízes de multiplicidade 1. Assim

$$X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

e pelas condições de fronteira

$$X'(0) = X'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B = 0$$

Conclui-se que qualquer que seja $\lambda \geq 1$, λ não é valor próprio do problema.

$\lambda < 1$, $(\lambda - 1 = -\mu^2)$, Neste caso o polinómio característico tem $\pm i\mu$ como raízes de multiplicidade 1. Assim

$$X(x) = A\cos(\mu x) + B\text{sen}(\mu x)$$

Pelas condições de fronteira

$$X'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

e

$$X'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad -A\mu\text{sen}(\mu) = 0$$

Mais uma vez pelo facto de X não poder ser identicamente nula

$$\mu = n\pi \quad , \quad n \in \mathbf{N}$$

Conclui-se que para cada $n \in \mathbf{N}$, $\lambda_n = 1 - n^2\pi^2$ é valor próprio do problema associado à solução

$$x_n(x) = \cos(n\pi x)$$

Para resolver o segundo problema (em T), consideraremos apenas os valores próprios que conduzem a soluções não-triviais (e não constantes) do primeiro problema.

$\lambda = 1 - n^2\pi^2$**.** $n \in \mathbf{N}$. A solução de $T' = (1 - n^2\pi^2) = t$ é

$$T_n(t) = e^{(1-n^2\pi^2)t} \quad , \quad n \in \mathbf{N}$$

Tem-se então que

$$u_n(t,x) = e^{(1-n^2\pi^2)t}\cos(n\pi x) \quad n \in \mathbf{N}$$

são soluções do problema de condições na fronteira homogéneas e como tal tambem combinações lineares o serão. Pelo que, formalmente

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(1-n^2\pi^2)t}\cos(n\pi x)$$

é solução.

Para determinar as constantes c_n, $n \in \mathbf{N}_0$, usamos a condição inicial, ou seja

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi x) = \cos\pi x + 5\cos 3\pi c + 8\cos 5\pi x$$

concluindo-se

$$c_1 = 1 \quad , \quad c_3 = 5 \quad , \quad c_5 = 8$$

e todos os outros $c_n = 0$. Finalmente

$$u(x,t) = e^{(1-\pi^2)t}\cos(\pi x) + 5e^{(1-9\pi^2)t}\cos(3\pi x) + 8e^{(1-25\pi^2)t}\cos(5\pi x)$$

é a solução pedida.

5) Considere o problema de valor inicial

$$x' = \tfrac{2}{\pi}\tfrac{1+x^2}{x}\text{arctg}(x+t)$$

$$x(0) = (e-1)^{\frac{1}{2}}$$

a) Verifique que este problema tem solução local única.

A função $f(t,x)=\frac{2}{\pi}\frac{1+x^2}{x}\text{arctg}\,(x+t)$ é claramente contínua no aberto $D=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0\}$, e, como $(0,(e-1)^{\frac{1}{2}}\in D$, temos certamente existência de solução do problema de valor inicial em questão. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{dx} = & \ \frac{2}{\pi}(\frac{x^2-1}{x^2}\text{arctg}\,(x+t) \\ & +\frac{1+x^2}{x}\frac{1}{1+(x+t)^2})\end{aligned}$$

que está bem definida e é contínua em D. Podemos então concluir que f é Localmente Lipschitziana em D e, pelo Teorema de Picard-Lindelof, garantir a existência de solução única do problema de valor inicial.

b) Verifique que o intervalo máximo de existência da solução contém $[0,+\infty[$. Claramente, concluímos que:

$$-\frac{1+x^2}{x}\leq x'\leq\frac{1+x^2}{x}.$$

Considerando então problema de valor inicial

$$u'=\frac{1+u^2}{u},\ u(0)=(e-1)^{\frac{1}{2}},$$

sabemos, por comparação de soluções, que, para $t>0$, se tem:

$$x(t)\leq u(t),$$

A equação diferencial para u é separável e fácilmente obtemos, tendo em conta a condição inicial. que

$$x(t)\leq u(t)=\sqrt{e^{2t+1}-1},\ t>0,$$

e $u(t)$ está bem definida para todo o $t>0$. Concluímos também que, se $x>0$, $x^2(t)\leq e^{2t+1}-1$, e então

$$x'\geq-\frac{1+x^2}{x}\geq-\frac{e^{2t+1}}{x}.$$

Resolvendo então o problema de valor inicial:

$$v'=-\frac{e^{2t+1}}{v}\ v(0)=(e-1)^{\frac{1}{2}},$$

concluímos que

$$x^2\geq -e^{2t+1}+(2e-1),$$

e, por continuidade da solução, como $x(0)>0$, a solução será sempre positiva e

$$x(t)\geq\sqrt{2e-1-e^{2t+1}},\ t>0,$$

expressão que está bem definida para todo o $t>0$.

Portanto, o intervalo máximo de existência da solução contém $[0,+\infty[$.