Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

12 de Setembro de 2005

Semana 1

1. Escreva os seguintes números complexos na forma $a + bi$ e represente-os geometricamente no plano de Argand:

$$\text{a)}\quad (2+i)(1-i) \quad \text{b)}\quad \frac{1}{1-i} \quad \text{c)}\quad \frac{2+i}{1+i}$$

$$\text{d)}\quad (2-3i)^2 \quad \text{e)}\quad \overline{(1-2i)^3} \quad \text{f)}\quad i^{234}$$

2. Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos e represente-os geometricamente:

$$\text{a)}\quad 3 \quad \text{b)}\quad -2 \quad \text{c)}\quad 1+i$$

$$\text{d)}\quad 3-4i \quad \text{e)}\quad -1-i$$

3. Calcule e represente geometricamente os númeors complexos

$$\text{a)}\quad \sqrt[3]{i} \quad \text{b)}\quad \sqrt[4]{-1} \quad \text{c)}\quad \sqrt{1-i}$$

$$\text{d)}\quad \sqrt[4]{(3-i\sqrt{3})^6} \quad \text{e)}\quad \left(\sqrt[4]{3-i\sqrt{3}}\right)^6$$

4. Mostre as seguintes desigualdades:

   a) $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$
   b) $|z+w| \leq |z| + |w|$
   c) $|z+w| \geq ||z| - |w||$

5. Esboçe no plano complexo o conjunto dos números complexos que satisfazem as relações seguintes:

   a) $|z-2| = 3$
   b) $|z-2| + |z+2| = 5$
   c) $|z-1| - |z+1| > 2$

d) $|z| = \text{Re}(z) + 2$

e) $\text{Im}(z) + \text{Re}(z) < 1$

f) $\text{Im}\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = 0$

g) $\text{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$

6. Resolva as seguintes equações em $\mathbb{C}$:

   a) $z^4 + 16i = 0$

   b) $z\overline{z} - z + \overline{z} = 0$

   c) $z^4 + z^2 = -1 - i$

   d) $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 6i$

   e) $z^6 = (i+2)^3 + \frac{1-28i}{2-i}$

7. Determine todos os vértices de um polígono regular de n lados, centrado na origem, sabendo que um deles é representado pelo complexo z_1.

8. Sejam z_1, z_2 e z_3 três números complexos de módulo unitário satisfazendo $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Mostre que esses complexos são vértices de um triângulo unitário.