Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

$\boxed{\textbf{Semana 10}}$

1. Determine a solução da equação linear:

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y' - 2 = b(t)$$

que verifica as condições iniciais

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y^{(2)}(0) = 1$$

quando:

(i) $b(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(ii) $b(t) = t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(iii) $b(t) = e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Resolução:

A solução da equação

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y' = b(t) + 2$$

é

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

em que $y_h(t)$ é a solução geral da equação homogénea associada, e $y_p(t)$ é uma solução particular da equação completa.

(i) Sendo $b(t) = 0$, estamos a resolver a equação

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y' = 2$$

e é óbvio que $y_p(t) = 2t$ é uma solução particular da equação. Para determinar a solução geral da equação homogénea

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y' = 0$$

note-se que a equação característica é

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1)^2 = 0$$

Então

$$y_1(t) = e^{0t} \quad , \quad y_2(t) = e^t \quad , \quad y_2(t) = te^t$$

são 3 soluções linearmente independentes da equação homogénea, pelo que

$$y_h(t) = a + be^t + cte^t$$

Finalmente, a solução da equação pedida é

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = a + be^t + cte^t + 2t$$

Dado que $y(0) = y'(0) = 0$ e $y''(0) = 1$, concluimos que

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ \\ b + c + 2 = 0 \\ \\ b + 2c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ \\ b = -5 \\ \\ c = 3 \end{cases}$$

pelo que

$$y(t) = 5 - 5e^t + 3te^t + 2t$$

(ii) A solução da equação

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y' = t + 2 \tag{1}$$

será

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

em que $y_h(t)$ é a solução geral da equação homogénea associada, e $y_p(t)$ é uma solução particular da equação completa. Como calculado em (i)

$$y_h(t) = a + be^t + cte^t$$

Para calcular y_p, note-se que $b(t) = t + 2 = (t + 2)e^{0t}$ é solução da equação diferencial

$$y'' = D^2 y = 0$$

Temos então, aplicando $P_a(D) = D^2$ à equação (1)

$$D^2(D^3 - D^2 + D)y = D^2(t + 2) \;\Leftrightarrow\; D^3(D - 1)^2 y = 0$$

Esta equação admite como solução geral (atenda a que as soluções do polinómio característico são 1 de multiplicidade 2 e 0 de multiplicidade 3)

$$y(t) = a + bt + ct^2 + de^t + fte^t$$

e conclui-se que $bt + ct^2$ é a candidata a solução particular (dado que $a + de^t + fte^t$ é y_h). Resta agora calcular as constantes b e c de modo a que $y_p(t) = bt + ct^2$ seja solução de (1). Assim

$$y_p(t) = bt + ct^2 \;\;,\;\; y_p'(t) = b + 2ct \;\;,\;\; y_p''(t) = 2c \;\;,\;\; y_p'''(t) = 0$$

pelo que

$$y_p^{(3)} - 2y_p^{(2)} + y_p' = t + 2 \;\Leftrightarrow\; 2ct + b - 4c = t + 2 \;\Leftrightarrow\; c = \frac{1}{2} \text{ e } b = 4$$

Tem-se então que $y_p(t) = 4t + \frac{t^2}{2}$, e a solução geral de (1) é

$$y(t) = a + be^t + cte^t + 4t + \frac{t^2}{2}$$

Dado que $y(0) = y'(0) = 0$ e $y''(0) = 1$, concluimos que

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ \\ b + c + 4 = 0 \\ \\ b + 2c + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ \\ b = -8 \\ \\ c = 4 \end{cases}$$

pelo que

$$y(t) = 8 - 8e^t + 4te^t + 4t + \frac{t^2}{2}$$

(iii) A solução da equação

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y' = e^t + 2 \tag{2}$$

será

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

em que $y_h(t)$ é a solução geral da equação homogénea associada, e $y_p(t)$ é uma solução particular da equação completa. Como calculado em (i)

$$y_h(t) = a + be^t + cte^t$$

Para calcular y_p, começamos por verificar que como consequência da linearidade da derivada

$$y_p(t) = 2t + z_p(t)$$

em que $z_p(t)$ é solução particular da equação

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y' = e^t \tag{3}$$

Sendo $b(t) = e^t$ solução da equação diferencial (por estar associada à raíz do polinómio característico 1 de multiplicidade 1)

$$y' - y = (D - 1)y = 0$$

teremos, aplicando $P_A(D) = D - 1$ à equação (3)

$$(D - 1)D(D - 1)^2 y = (D - 1)e^t \;\Leftrightarrow\; D(D - 1)^3 y = 0$$

Esta equação admite como solução geral (atenda a que as soluções do polinómio característico são 0 de multiplicidade 1 e 1 - de multiplicidade 3)

$$y(t) = a + be^t + cte^t + dt^2 e^t$$

e conclui-se que dt^2e^t é a candidata a solução particular (dado que $a + be^t + cte^t$ é y_h). Resta agora calcular a constante d de modo a que $z_p(t) = dt^2e^t$ seja solução de (3). Assim

$$z_p(t) = dt^2e^t \;\;,\;\; z_p'(t) = d(2t + t^2)e^t \;\;,\;\; z_p''(t) = d(2 + 4t + t^2)e^t \;\;,\;\; z_p'''(t) = d(6 + 6t + t^2)e^t$$

pelo que

$$z_p^{(3)} - 2z_p^{(2)} + z_p' = e^t \;\Leftrightarrow\; 2d = 1 \;\Leftrightarrow\; d = \frac{1}{2}$$

Tem-se então que $z_p(t) = \frac{t^2e^t}{2}$, e a solução geral de (2) é

$$y(t) = a + be^t + cte^t + 2t + \frac{t^2e^t}{2}$$

Dado que $y(0) = y'(0) = 0$ e $y''(0) = 1$, concluimos

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=0 \\ \\ b+c+2=0 \\ \\ b+2c+1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=4 \\ \\ b=-4 \\ \\ c=2 \end{array}\right.$$

pelo que

$$y(t) = 4 - 4e^t + 2te^t + 2t + \frac{t^2e^t}{2}$$

2. Determine a solução da equação diferencial

$$y'' - 4y' + 3y = (1+e^{-x})^{-1}$$

que verifica as condições iniciais $y(0) = y'(0) = 1$

Resolução:

A solução da equação é da forma

$$y(t) = y_h(x) + y_p(x)$$

sendo y_h a solução geral da equação homogénea associada e y_p uma solução particular da equação completa. Começemos por calcular y_h. O polinómio característico associado é

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3$$

Sendo assim, e^x e e^{3x} são duas soluções linearmente independentes da equação homogénea, pelo que

$$y_h(t) = c_1e^x + c_2e^{3x}$$

Para calcular y_p, notamos que teremos forçosamente de utilizar a fórmula da variação das constantes, dado que

$$h(x) \equiv \frac{1}{1+e^{-x}}$$

não é solução de nenhuma equação diferencial linear de coeficientes constantes. Assim sendo

$$y_p(x) = \left[\begin{array}{cc} e^x & e^{3x} \end{array}\right] \int^x W^{-1}(s) \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{1+e^{-s}} \end{array}\right] ds$$

em que $W(x)$ é a matriz Wronskiana associada, isto é

$$W(x) = \left[\begin{array}{cc} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{array}\right]$$

Assim

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \end{bmatrix} \int^x \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-s} & -e^{-s} \\ -e^{-3s} & e^{-3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^{-s}} \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \end{bmatrix} \int^x \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{e^{-s}}{1+e^{-s}} \\ \frac{e^{-3s}}{1+e^{-s}} \end{bmatrix} ds \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log(1+e^{-x}) \\ -\frac{e^{-2x}}{2} + e^{-x} - \log(1+e^{-x}) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \left(e^x \log(1+e^{-x}) - \frac{e^x}{2} + e^{2x} - e^{3x} \log(1+e^{-x}) \right) \\
&= \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^x}{4} + \frac{e^x - e^{3x}}{2} \log(1+e^{-x})
\end{aligned}
$$

onde calculámos a primitiva de $\frac{e^{-3s}}{1+e^{-s}}$ fazendo a substituição $e^{-s} = t$. Finalmente

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^x}{4} + \frac{e^x - e^{3x}}{2} \log(1+e^{-x})$$

Dado que $y(0) = y'(0) = 1$ tem-se que

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{3}{4} \\ \\ c_1 + 3c_2 = \frac{1}{4} + \log 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - \frac{1}{2}\log 2 \\ \\ c_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log 2 \end{cases}$$

pelo que

$$y(x) = \frac{e^x - e^{3x}}{2} \log\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right) - \frac{e^{3x}}{4} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{3e^x}{4}$$

3. Considere a equação

$$y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5y' = 0$$

(i) Determine a sua solução geral.

(ii) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções convergentes quando $t \to \infty$.

(i) O polinómio característico associado é

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 0 \,\text{ou}\, \lambda = 2 \pm i$$

pelo que 1, $e^{2t}\cos t$ e $e^{2t}\,\mathrm{sen}\,t$ são três soluções linearmente independentes da equação. Como tal a sua solução geral é

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{2t}\cos t + c_3 e^{2t}\,\mathrm{sen}\,t$$

(ii) Pretende-se determinar α, β e γ de modo a que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5y' = 0 \\ y(0) = \alpha \;,\; y'(0) = \beta \;,\; y''(0) = \gamma \end{cases}$$

tenha solução limitada. Observe que a função $y(t)$ possui limite quando $t \to \infty$ sse $c_2 = c_3 = 0$, isto é se é da forma $y(t) = c_1$. Sendo assim, as condições iniciais requeridas serão

$$y(0) = \alpha \ , \ y'(0) = 0 \ , \ y''(0) = 0$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Para que valores de $c \in \mathbb{R}$ é que a equação

$$y'' - 2cy' + y = 0$$

admite uma solução periódica, que não seja identicamente nula?

Resolução: O polinómio característico associado é

$$\lambda^2 - 2c\lambda + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda = c \pm \sqrt{c^2 - 1}$$

Há, então, três hipóteses:

- $c^2 - 1 = 0$: Neste caso o polinómio característico tem apenas uma raíz c pelo que a solução da equação diferencial é

  $$y(t) = c_1 e^{ct} + c_2 t e^{ct}.$$

  A única solução periódica é a solução nula: $c_1 = c_2 = 0$.

- $c^2 - 1 > 0$: Neste caso o polinómio característico tem duas raízes reais distintas c^+ e c^-, pelo que a solução da equação diferencial é

  $$y(t) = c_1 e^{c^+ t} + c_2 e^{c^- t}.$$

  Mais uma vez, a única solução periódica é a solução nula: $c_1 = c_2 = 0$.

- $c^2 - 1 < 0$: Neste caso o polinómio característico tem duas raízes complexas conjugadas $c \pm i\sqrt{1 - c^2}$, pelo que a solução da equação diferencial é

  $$y(t) = c_1 e^{ct} \cos(t\sqrt{1 - c^2}) + c_2 e^{ct} \operatorname{sen}(t\sqrt{1 - c^2})$$

  Para que esta solução seja periódica teremos de ter $c = 0$. Assim, este valor é o único valor de c para o qual a equção admite soluções periódicas não triviais. Neste caso as soluções são:

  $$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t)$$

5. Considere a equação

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = t + \cos t \tag{4}$$

(i) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente a (4).

(ii) Determine uma solução particular de (4).

(iii) Determine a solução de (4) que verifica a condição inicial

$$y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$$

Resolução:

(i) O polinómio característico associado é

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda^2(\lambda+1)^2 = 0$$

pelo que 1, t, e^{-t} e te^{-t} são soluções independentes da equação homogénea, e como tal

$$y_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t}$$

é a solução pedida.

(ii) Como usualmente a solução de (4) é dada por

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} + y_p(t)$$

em que y_p é uma solução particular de (4). Para utilizar o método dos coeficientes indeterminados, podemos considerar

$$y_p(t) = z_1(t) + z_2(t)$$

em que z_1 é solução da equação diferencial

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = t \tag{5}$$

e, z_2 é solução da equação diferencial

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = \cos t \tag{6}$$

Começemos por calcular z_1. Visto t ser solução da equação

$$y'' = D^2 y = 0$$

aplicando $P_a(D) = D^2$ à equação (5)

$$D^4(D+1)^2 y = D^2 t = 0$$

Esta equação admite como solução geral (atenda a que as soluções do polinómio característico são 0 de multiplicidade 4 e -1 de multiplicidade 2)

$$y(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3 + a_5 e^{-t} + a_6 t e^{-t}$$

e conclui-se que $a_3 t^2 + a_4 t^3$ é a candidata a solução particular (dado que $a_1 + a_2 t + a_5 e^{-t} + a_6 t e^{-t}$ é y_h). Resta agora calcular as constantes a_3 e a_4 de modo a que $z_1(t) = a_3 t^2 + a_4 t^3$ seja solução de (5). Assim

$$z_1(t) = a_3 t^2 + a_4 t^3 \ , \ z_1'(t) = 2a_3 t + 3a_4 t^2 \ , \ z_1''(t) = 2a_3 + 6a_4 t \ , \ z_1'''(t) = 6a_4 \ , \ z_1^{(iv)}(t) = 0$$

pelo que

$$z_1^{(4)} + 2z_1^{(3)} + z_1^{(2)} = t \ \Leftrightarrow \ 12a_4 + 2a_3 + 6a_4 t = t \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} a_3 = -1 \\ a_4 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Tem-se então que $z_1(t) = -t^2 + \frac{t^3}{6}$. Para calcular z_2, note-se que $\cos t$ é solução da equação

$$y'' + y = (D^2+1)y = 0$$

aplicando $P_a(D) = D^2+1$ à equação (6)

$$(D^2+1)D^2(D+1)^2 y = (D^2+1)\cos t = 0$$

As raizes do polinómio característico são 0 (com multiplicidade 2), -1 (com multiplicidade 2) e $\pm i$ (simples). Assim, a equação acima admite como solução geral:

$$y(t) = a_1 + a_2 t + a_3 e^{-t} + a_4 t e^{-t} + a_5 \cos t + a_6 \operatorname{sen} t$$

e conclui-se que $a_5 \cos t + a_6 \operatorname{sen} t$ é a candidata a solução particular (dado que $a_1 + a_2 t + a_3 e^{-t} + a_4 t e^{-t}$ é y_h). Resta agora calcular as constantes a_5 e a_6 de modo a que $z_2(t) = a_5 \cos t + a_6 \operatorname{sen} t$ seja solução de (6). Assim

$$z_2(t) = a_5 \cos t + a_6 \operatorname{sen} t \;,\; z_2'(t) = -a_5 \operatorname{sen} t + a_6 \cos t \;,\; z_2''(t) = -a_5 \cos t - a_6 \operatorname{sen} t$$
$$z_2'''(t) = a_5 \operatorname{sen} t - a_6 \cos t \;,\; z_2^{(iv)}(t) = z_2(t)$$

pelo que

$$z_2^{(4)} + 2z_2^{(3)} + z_2^{(2)} = t \;\Leftrightarrow\; -2a_6 \cos t + 2a_5 \operatorname{sen} t = \cos t \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a_5 = 0 \\ a_6 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Tem-se então que $z_2(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t$. Finalmente

$$y(t) = y_h(t) + z_1(t) + z_2(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} - t^2 + \frac{t^3}{6} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$$

(iii) Dado que $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ concluimos

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 - c_3 + c_4 - \frac{1}{2} = 0 \\ c_3 - 2c_4 - 2 = 0 \\ -c_3 + 3c_4 + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -3 \\ c_2 = 3 \\ c_3 = 3 \\ c_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

pelo que

$$y(t) = -3 + 3t + 3e^{-t} + \frac{1}{2} t e^{-t} - t^2 + \frac{t^3}{6} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$$