Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

20 de Fevereiro de 2006

Semana 13

1. Determine os valores de λ para os quais os seguintes problemas de valores fronteira têm soluções não triviais:

   (a) $y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

   (b) $y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$

   Resolução:

   (a) A equação característica associada é

$$R^2 - 2R + (1+\lambda) = 0 \Leftrightarrow R = 1 \pm \sqrt{-\lambda}$$

   Existem então três possibilidades:

$\lambda = 0$ A equação característica tem uma solução $R = 1$ de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = Bxe^x$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \Rightarrow Be = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = 0\, \forall x$$

pelo que $\lambda = 0$ não é valor próprio.

$\lambda < 0$ ($\lambda = -\mu^2$) A equação característica tem duas soluções reais distintas $R = 1 \pm \mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{(1+\mu)x} + Be^{(1-\mu)x} = e^x\left(Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}\right)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow y(x) = Ae^x\left(e^{\mu x} - e^{-\mu x}\right)$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \Rightarrow A(e^{\mu} - e^{-\mu}) = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ou } \mu = -\mu \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = 0\, \forall x$$

pelo que qualquer $\lambda < 0$ não é valor próprio.

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) A equação característica tem duas soluções complexas conjugadas $R = 1 \pm i\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^x \operatorname{sen}(\mu x) + Be^x \cos(\mu x)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = Ae^x \operatorname{sen}(\mu x)$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \Rightarrow Ae \operatorname{sen} \mu = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ou } \mu = k\pi\ k \in \mathbb{N}$$

tem-se então que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = k^2\pi^2$ é valor próprio da equação associado à função própria $y_k(x) = B_k \operatorname{sen}(k\pi x)$.

(b) A equação característica associada é

$$R^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow R = \pm\sqrt{-\lambda}$$

Existem então três possibilidades:

$\lambda = 0$ A equação característica tem uma solução $R = 0$ de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A + Bx$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = y(2\pi) \Rightarrow A = A + 2\pi B \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = A$$

Sendo assim $y'(x) = 0$ e a condição $y'(0) = y'(2\pi)$ verifica-se para qualquer $A \in \mathbb{R}$. Conclui-se que $\lambda = 0$ é valor próprio da equação associado à função própria $y(x) = A_0$.

$\lambda < 0$ ($\lambda = -\mu^2$) A equação característica tem duas soluções reais distintas $R = \pm\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = y(2\pi) \Rightarrow A + B = Ae^{2\mu\pi} + Be^{-2\mu\pi} \Rightarrow B = A\frac{e^{2\mu\pi} - 1}{1 - e^{-2\mu\pi}}$$

e então

$$y(x) = A\left(e^{\mu x} + \frac{e^{2\mu\pi} - 1}{1 - e^{-2\mu\pi}} e^{-\mu x}\right)$$

Como consequência

$$y'(x) = A\mu\left(e^{\mu x} - \frac{e^{2\mu\pi} - 1}{1 - e^{-2\mu\pi}} e^{-\mu x}\right)$$

pelo que

$$y'(0) = y'(2\pi) \Rightarrow A\mu\left(1 - \frac{e^{2\mu\pi} - 1}{1 - e^{-2\mu\pi}}\right) = A\mu\left(e^{2\mu\pi} - \frac{e^{2\mu\pi} - 1}{1 - e^{-2\mu\pi}} e^{-2\mu\pi}\right)$$

ou seja

$$\frac{2A^{-2\mu\pi}}{e^{-2\mu\pi} - 1}(e^{2\mu\pi} - 1)^2 = 0$$

e dado que por hipótese $\mu \neq 0$

$$A = 0 \Rightarrow y(x) = 0\ \forall x$$

pelo que qualquer $\lambda < 0$ não é valor próprio.

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) A equação característica tem duas soluções complexas conjugadas $R = \pm i\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A\operatorname{sen}(\mu x) + B\cos(\mu x)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = y(2\pi) \Rightarrow B = A\operatorname{sen}(2\mu\pi) + B\cos(2\mu\pi)$$

Se $\operatorname{sen}(2\mu\pi) = 0$, isto é se $\mu = k$, $k \in \mathbb{N}$, então tambem $1 - \cos(2\mu\pi) = 0$ e a condição $y(0) = y(2\pi)$ verifica-se para qualquer A e qualquer B. Nesse caso

$$y'(x) = k(A\cos(kx) - B\operatorname{sen}(kx))$$

e é fácil de verificar que tambem a condição $y'(0) = y'(2\pi)$ se verifica independente de A, B. conclui-se que $\lambda = \mu^2 = k^2$ é valor próprio associado às funções próprias $\operatorname{sen}(kx)$ e $\cos(kx)$. Verifica-se que a condição $\operatorname{sen}(2\mu\pi) \neq 0$ não torna possível as condições de fronteira.

2. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u & \text{se } x \in]0,1[\\ u(0,t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(1,t) = \operatorname{sen} 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Resolução:

Dado que as condições de fronteira não são homogéneas, teremos que considerar

$$u(t,x) = v(x) + w(t,x)$$

em que $v(x)$ é a solução do problema

$$\begin{cases} 0 = v''(x) + v(x) & \text{se } x \in]0,1[\\ v(0) = 0 \\ v(1) = \operatorname{sen} 1 \end{cases} \tag{1}$$

e $w(t,x)$ é solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w & \text{se } x \in]0,1[\\ w(t,0) = 0 \\ w(t,1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Começemos por resolver o problema (**??**). Trata-se de uma equação ordinária linear de coeficientes constantes, de equação característica

$$R^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow R = \pm i$$

pelo que a solução geral da equação é

$$v(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x$$

Dado que $v(0) = 0$, tem-se que $A = 0$, pelo que $v(x) = B\operatorname{sen} x$. Por outro lado, dado que $v(1) = \operatorname{sen} 1$ tem-se $A = 1$ e

$$v(x) = \operatorname{sen} x$$

Para resolver o problema (**??**) utilizaremos o método de separação de variáveis. Assim, considerando $w(t,x) = T(t)X(x)$ e substituindo na equação, obteremos

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) + T(t)X(x) \Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} + 1$$

Sendo o primeiro membro da equação uma função de t e o segundo membro uma função de x, para que a igualdade se verifique para todo $t > 0$ e $x \in]0,1[$, tem de existir $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual

$$\frac{T'}{T} - 1 = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$w(t,0) = 0 \Rightarrow T(t)X(0) = 0 \Rightarrow T(t) \equiv 0 \text{ ou } X(0) = 0$$

dado que $T(t)$ não pode ser a função nula

$$w(t,0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$w(t,1) = 0 \Rightarrow X(1) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{se } x \in]0,1[\\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

e

$$T' = (1+\lambda)T \tag{4}$$

Para resolver (**??**), temos que procurar os valores e funções próprias associadas. O polinómio caracterítico associado é

$$R^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow R = \pm\sqrt{\lambda}$$

Existem então três possibilidades:

$\lambda = 0$ A equação característica tem uma solução $R = 0$ de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A + Bx$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = Bx$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = 0\,\forall x$$

pelo que $\lambda = 0$ não é valor próprio.

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) A equação característica tem duas soluções reais distintas $R = \pm\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow y(x) = A\left(e^{\mu x} - e^{-\mu x}\right)$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \Rightarrow A(e^{\mu} - e^{-\mu}) = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ou } \mu = -\mu \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = 0\,\forall x$$

pelo que qualquer $\lambda > 0$ não é valor próprio.

$\lambda < 0$ ($\lambda = -\mu^2$) A equação característica tem duas soluções complexas conjugadas $R = \pm i\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A\,\text{sen}\,(\mu x) + B\cos(\mu x)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = A\,\text{sen}\,(\mu x)$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \Rightarrow A\,\text{sen}\,\mu = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ou } \mu = k\pi\ k \in \mathbb{N}$$

tem-se então que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = -k^2\pi^2$ é valor próprio da equação associado à função própria $X_k(x) = B_k\text{sen}\,(k\pi x)$.

Podemos agora resolver (**??**), apenas para os valores de λ encontrados anteriormente (pois para outros valores de λ a solução de (**??**) é a solução nula que não nos interessa.). Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T'(t) = (1 - k^2\pi^2)T \Leftarrow T_k(t) = C_k e^{(1-k^2\pi^2)t}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, a função

$$w_k(t,x) = T_k(t)X_k(x) = A_k e^{(1-k^2\pi^2)t}\text{sen}\,(k\pi x)$$

é solução do problema de valores na fronteira (**??**), e consequentemente qualquer combinação linear tambem o será, ou seja

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_k e^{(1-k^2\pi^2)t} \operatorname{sen}(k\pi x)$$

Finalmente

$$u(t,x) = v(x) + w(t,x) = \operatorname{sen} x + \sum_{n=1}^{\infty} A_k e^{(1-k^2\pi^2)t} \operatorname{sen}(k\pi x)$$

é a solução pedida.

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = 3\operatorname{sen}(2\pi x) - 7\operatorname{sen}(4\pi x) + \operatorname{sen}(x) \ .$$

Resolução:

Pela alínea anterior

$$u(0,x) = \operatorname{sen} x + \sum_{n=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen}(k\pi x) = 3\operatorname{sen}(2\pi x) - 7\operatorname{sen}(4\pi x) + \operatorname{sen}(x)$$

pelo que teremos que determinar os coeficientes A_k de modo a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen}(k\pi x) = 3\operatorname{sen}(2\pi x) - 7\operatorname{sen}(4\pi x)$$

Facilmente se verifica que

$$A_k = \begin{cases} 3 & \text{se } k = 2 \\ -7 & \text{se } k = 4 \\ 0 & \text{se } k \neq 2 \ , \ k \neq 4 \end{cases}$$

pelo que a solução do problema de valor inicial e valore na fronteira é

$$u(t,x) = \operatorname{sen} x + 3e^{(1-4\pi^2)t} \operatorname{sen}(2\pi x) - 7e^{(1-16\pi^2)t} \operatorname{sen}(4\pi x)$$

3. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \ x \in (0,\pi), \ \text{com} \begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \ \operatorname{sen}(x) - 2 \ \operatorname{sen}(5x). \end{cases}$$

Resolução:

Para resolver o problema de valores na fronteira, utilizaremos o método de separação de variáveis. Assim, considerando $u(t,x) = T(t)X(x)$ e substituindo na equação, obteremos

$$T'(t)X(x) = \alpha^2 T(t) X''(x) \ \Rightarrow \ \frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X}$$

Sendo o primeiro membro da equação uma função de t e o segundo membro uma função de x, para que a igualdade se verifique para todo $t > 0$ e $x \in]0,\pi[$, tem de existir $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$u(t,0) = 0 \Rightarrow T(t)X(0) = 0 \Rightarrow T(t) \equiv 0 \text{ ou } X(0) = 0$$

dado que $T(t)$ não pode ser a função nula

$$u(t,0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$u(t,\pi) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{se } x \in]0,\pi[\\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

e

$$T' = (\alpha^2 \lambda)T \tag{6}$$

Para resolver (**??**), temos que procurar os valore e funções próprias associadas. O polinómio caracterítico associado é

$$R^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow R = \pm\sqrt{\lambda}$$

Existem então três possibilidades:

$\lambda = 0$ A equação característica tem uma solução $R = 0$ de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A + Bx$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = Bx$$

Por outro lado

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow B\pi = 0 \Rightarrow y(x) = 0\, \forall x$$

pelo que $\lambda = 0$ não é valor próprio.

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) A equação característica tem duas soluções reais distintas $R = \pm\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow y(x) = A\left(e^{\mu x} - e^{-\mu x}\right)$$

Por outro lado

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow A(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}) = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ou } \mu = -\mu \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = 0\, \forall x$$

pelo que qualquer $\lambda > 0$ não é valor próprio.

$\lambda < 0$ $(\lambda = -\mu^2)$ A equação característica tem duas soluções complexas conjugadas $R = \pm i\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A\text{sen}\,(\mu x) + B\cos\,(\mu x)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = A\text{sen}\,(\mu x)$$

Por outro lado

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow A\text{sen}\,\pi\mu = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ou } \pi\mu = k\pi \; k \in \mathbb{N}$$

tem-se então que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = -k^2$ é valor próprio da equação associado à função própria $X_k(x) = B_k\text{sen}\,(kx)$.

Podemos agora resolver (**??**), apenas para os valores de λ encontrados anteriormente (pois para outros valores de λ a solução de (**??**) é a solução nula que não nos interessa.). Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T'(t) = -\alpha^2 k^2 T \Rightarrow T_k(t) = C_k e^{-\alpha^2 k^2 t}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, a função

$$u_k(t,x) = T_k(t)X_k(x) = A_k e^{-\alpha^2 k^2 t}\text{sen}\,(kx)$$

é solução do problema de valores na fronteira, e consequentemente qualquer combinação linear tambem o será, ou seja

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_k e^{-\alpha^2 k^2 t}\text{sen}\,(kx)$$

Para calcular as constantes A_k utilizaremos a condição inicial

$$u(0,x) = \text{sen}\,x - 2\text{sen}\,(5x)$$

Assim

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_k\text{sen}\,(kx) = \text{sen}\,x - 2\text{sen}\,(5x)$$

Facilmente se verifica que

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 1 \\ -2 & \text{se } k = 5 \\ 0 & \text{se } k \neq 1\,,\; k \neq 5 \end{cases}$$

pelo que a solução do problema de valor inicial e valores na fronteira é

$$u(t,x) = e^{-\alpha^2 t}\text{sen}\,(x) - 2e^{-25\alpha^2 t}\text{sen}\,(5x)$$

4. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u,\; x \in (0,L),\; \text{com}\begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos\,(3\pi x/L). \end{cases}$$

Resolução:

Para resolver o problema de valores na fronteira, utilizaremos o método de separação de variáveis. Assim, considerando $u(t,x) = T(t)X(x)$ e substituindo na equação, obteremos

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) - T(t)X(x) \;\Rightarrow\; \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} - 1$$

Sendo o primeiro membro da equação uma função de t e o segundo membro uma função de x, para que a igualdade se verifique para todo $t > 0$ e $x \in]0,\pi[$, tem de existir $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual

$$\frac{T'}{T} + 1 = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$u_x(t,0) = 0 \;\Rightarrow\; T(t)X'(0) = 0 \;\Rightarrow\; T(t) \equiv 0 \text{ ou } X'(0) = 0$$

dado que $T(t)$ não pode ser a função nula

$$u(t,0) = 0 \;\Rightarrow\; X'(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$u_x(t,L) = 0 \;\Rightarrow\; X'(L) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{se } x \in]0,L[\\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

e

$$T' = (\lambda - 1)T \tag{8}$$

Para resolver (**??**), temos que procurar os valores e funções próprias associadas. O polinómio caracterítico associado é

$$R^2 - \lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; R = \pm\sqrt{\lambda}$$

Existem então três possibilidades:

$\lambda = 0$ A equação característica tem uma solução $R = 0$ de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A + Bx \;\Rightarrow\; y'(x) = B$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y'(0) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = A \;\Rightarrow\; y(x) = 0$$

Por outro lado $y'(L) = 0$ verifica-se qualquer que seja A pelo que $\lambda = 0$ é valor próprio associado à função própria $X_0(x) = A_0$.

$\lambda > 0$ $(\lambda = \mu^2)$ A equação característica tem duas soluções reais distintas $R = \pm\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} \Rightarrow y'(x) = \mu\left(Ae^{\mu x} - Be^{-\mu x}\right)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y'(0) = 0 \Rightarrow A - B = 0 \Rightarrow B = A \Rightarrow y(x) = A\left(e^{\mu x} + e^{-\mu x}\right)$$

Por outro lado

$$y'(L) = 0 \Rightarrow A(e^{\mu L} - e^{-\mu L}) = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ou } \mu = -\mu \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = 0\,\forall x$$

pelo que qualquer $\lambda > 0$ não é valor próprio.

$\lambda < 0$ $(\lambda = -\mu^2)$ A equação característica tem duas soluções complexas conjugadas $R = \pm i\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A\operatorname{sen}(\mu x) + B\cos(\mu x) \Rightarrow y'(x) = \mu\left(A\cos(\mu x) - B\operatorname{sen}(\mu x)\right)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y'(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = B\cos(\mu x)$$

Por outro lado

$$y'(L) = 0 \Rightarrow -B\mu\operatorname{sen} L\mu = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ou } L\mu = k\pi\ k \in \mathbb{N}$$

tem-se então que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$ é valor próprio da equação associado à função própria $X_k(x) = B_k\cos(\frac{k\pi}{L}x)$.

Podemos agora resolver (**??**), apenas para os valores de λ encontrados anteriormente (pois para outros valores de λ a solução de (**??**) é a solução nula que não nos interessa.). Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T'(t) = (-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - 1)T \Leftarrow T_k(t) = C_k e^{(-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - 1)t}$$

e para $\lambda = 0$

$$T'(t) = -T(t) \Leftarrow T_0(t) = C_0 e^{-t}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, a função

$$u_k(t,x) = T_k(t)X_k(x) = A_k e^{(-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - 1)t}\cos(\frac{k\pi}{L}x)$$

é solução do problema de valores na fronteira, assim como

$$u_0(t,x) = A_0 e^{-t}$$

Consequentemente qualquer combinação linear tambem o será, ou seja

$$u(t,x) = A_0 e^{-t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_k e^{(-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - 1)t}\cos(\frac{k\pi}{L}x)$$

Para calcular as constantes A_k, $k \in \mathbb{N}_0$ utilizaremos a condição inicial

$$u(0,x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right.$$

Assim

$$u(0,x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right.$$

Facilmente se verifica que

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{se } k \neq 3 \end{cases}$$

pelo que a solução do problema de valor inicial e valores na fronteira é

$$u(t,x) = e^{(-\frac{9\pi^2}{L^2}-1)t} \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$$

5. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ +1 & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Resolução:

A série de Fourier associada a f será

$$SF[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\pi x) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x) \Big)$$

em que

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 \quad \text{e} \quad a_n = \int_{-1}^{1} \cos(n\pi x) f(x)\, dx = 0$$

dado que f é uma função impar; e

$$b_n = \int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(n\pi x) f(x)\, dx = 2\int_{0}^{1} \operatorname{sen}(n\pi x)\, dx = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$$

Assim

$$SF[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}(1-\cos(n\pi))\operatorname{sen}(n\pi x)$$

Visto

$$1-\cos(n\pi) = 1-(-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2 & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$$

podemos escrever

$$SF[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen}((2n-1)\pi x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]-1,0[\cup]0,1[\\ 0 & \text{se } x = -1,\ x = 0,\ x = 1 \end{cases}$$

6. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Resolução:

A função $f(x)$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \begin{cases} L + x & \text{se } x \in [-L, 0[\\ L - x & \text{se } x \in [0, L] \end{cases}$$

A série de Fourier associada a f será

$$SF[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right)$$

em que

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L (L-x)\,dx = L$$

e para $n > 1$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\pi x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\pi x)\,dx = \frac{2L}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi))$$

Dado que f é uma função par podemos concluir que

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}(n\pi x) f(x)\,dx = 0$$

Assim

$$SF[f](x) = \frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi))\cos\frac{n\pi}{L}x$$

Visto

$$1 - \cos(n\pi) = 1 - (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2 & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$$

podemos escrever

$$SF[f](x) = \frac{L^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{L}x = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]-L, L[\\ \frac{L}{2} & \text{se } x = -L,\ x = L \end{cases}$$

Para calcular o valor da série numérica, usaremos o facto de para $x = 0$ se ter $SF[f](0) = f(0)$, isto é

$$\frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L}{(2n-1)^2\pi^2} = L$$

pelo que

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

7. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Resolução:

A série de Fourier associada a h será

$$SF[h](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right)$$

em que

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} h(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\,dx = \frac{2L^2}{3}$$

e para $n > 1$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} h(x)\cos(n\pi x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \cos(n\pi x)\,dx = \frac{4L^2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)$$

Dado que f é uma função par podemos concluir que

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}(n\pi x) h(x)\,dx = 0$$

Assim

$$SF[h](x) = \frac{L^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L^2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)\cos\frac{n\pi}{L}x = \begin{cases} h(x) & \text{se } x \in]-L, L[\\ L^2 & \text{se } x = -L,\ x = L \end{cases}$$

Para calcular o valor da série numérica, usaremos o facto de para $x = 0$ se ter $SF[h](L) = L^2$, isto é

$$\frac{L^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L^2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)\cos(n\pi) = L^2$$

pelo que

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

8. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } \operatorname{sen} x > 0 \\ 0 & \text{se } \operatorname{sen} x \leqslant 0 \end{cases}$$

Resolução:

A função f pode ser escrita na forma

$$f(x) = \begin{cases} \ldots & \\ 0 & \text{se } x \in]-3\pi, -2\pi[\\ \operatorname{sen} x & \text{se } x \in [-2\pi, -\pi] \\ 0 & \text{se } x \in]-\pi, 0[\\ \operatorname{sen} x & \text{se } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{se } x \in]\pi, 2\pi[\\ \ldots & \end{cases}$$

pelo que a função é periódica de período 2π. Assim, a série de Fourier associada a f será

$$SF[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos\,(\frac{n\pi}{\pi}x) + b_n \operatorname{sen}\,(\frac{n\pi}{\pi}x) \Big)$$

em que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}$$

Para $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\,(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos\,(nx)\,dx = \frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi\,(n^2-1)}$$

se $n \neq 1$, onde para calcular a primitiva de $\operatorname{sen} x \cos\,(nx)$ utilizámos a fórmula

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\,(a+b) + \operatorname{sen}\,(a-b))$$

Se $n = 1$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}\,(2x)\,dx = 0$$

Por outro lado, se $n \neq 1$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}\,(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\,(nx)\,dx = 0$$

onde para calcular a primitiva de $\operatorname{sen} x \operatorname{sen}\,(nx)$ utilizámos a fórmula

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}(\cos\,(a-b) - \cos\,(a+b))$$

e para $n = 1$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2}$$

Assim

$$SF[f](x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi\,(n^2-1)}\cos\,(nx) + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$$

Visto

$$(-1)^{n+1} - 1 = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é impar} \\ -2 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

podemos escrever

$$SF[f](x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi\,(4n^2-1)}\cos\,(2nx) + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = f(x) \quad , \ \forall x$$

9. Desenvolva a função definida no intervalo $[0,1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

   Resolução:

   (b) A série de senos associada a f é

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x)$$

   em que

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)$$

   A série de senos de f em $[0,1]$ é consequência da extensão impar de f ao intervalo $[-1,1]$, isto é, da série de Fourier da função

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-1,0[\\ 1 & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$$

   pelo que

$$SF[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)\operatorname{sen}(n\pi x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in]0,1[\\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

10. Considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Determine:

    (a) a série de Fourier associada a f;

    (b) a série de senos associada a f;

    (c) a série de cosenos associada a f.

Resolução:

(a) À função f está associada a série de Fourier

$$SF[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(2n\pi x) + b_n\operatorname{sen}(2n\pi x)\Big)$$

com

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(2n\pi x)\,dx \quad \text{para} \quad n \geq 0$$

e

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\operatorname{sen}(2n\pi x)\,dx \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Calculando os coeficientes, tem-se

$$a_0 = 2\int_0^1 x\,dx = 1$$

e para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 x\cos(2n\pi x)\,dx \\ &= 2\Big(\frac{x}{2n\pi}\operatorname{sen}(2\pi n x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2n\pi}\int_0^1 \operatorname{sen}(2\pi n x)\,dx\Big) = 0 \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^1 x\,\mathrm{sen}\,(2n\pi x)\,dx \\
&= 2\Big(-\frac{x}{2n\pi}\cos(2\pi n x)\Big|_0^1 + \frac{1}{2n\pi}\int_0^1 \cos(2\pi n x)\,dx\Big) \\
&= -\frac{1}{n\pi}\cos(2\pi n) = -\frac{1}{n\pi}
\end{aligned}
$$

Temos então que, para $x \in [0,1]$

$$SF[f](x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\mathrm{sen}\,(2n\pi x).$$

Dado que $f(x)$ é contínua em $[0,1]$, podemos concluir que

$$SF[f](x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in]0,1[\\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

(b) A série de senos associada a f é

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{sen}\,(n\pi x)$$

em que

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{sen}\,(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\,\mathrm{sen}\,(n\pi x)\,dx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

(c) A série de cosenos associada a f é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$$

onde

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 1$$

e para $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1)$$