Análise Matemática IV
Resolução dos problemas para as aulas práticas

Semana 2

1. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z = x + iy$):

a) $\cos(iz) = \cosh(z)$; b) $\operatorname{sen}(iz) = i\operatorname{senh} z$;

c) $|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 = \cosh(2y)$; d) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$;

e) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w$; f) $\cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z = \cosh(2z)$.

Resolução:

(a) Utilizando a definição de coseno complexo

$$\cos(iz) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh z$$

(b) De modo análogo

$$\operatorname{sen}(iz) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = -i\frac{e^{-z} - e^{z}}{2} = i\operatorname{senh} z$$

(c) Notando que para um complexo z o quadrado do seu módulo é dado por $|z|^2 = z\overline{z}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
|\cos z|^2 &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\overline{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} \\
&= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\frac{e^{-i\bar{z}} + e^{i\bar{z}}}{2} \\
&= \frac{e^{i(z-\bar{z})} + e^{i(z+\bar{z})} + e^{-i(z-\bar{z})} + e^{-i(z+\bar{z})}}{4}
\end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen} z|^2 &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\overline{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}} \\
&= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\frac{e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}}{-2i} \\
&= \frac{e^{i(z-\bar{z})} - e^{i(z+\bar{z})} + e^{-i(z-\bar{z})} - e^{-i(z+\bar{z})}}{4}
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 &= \frac{e^{i(z-\bar{z})} + e^{-i(z-\bar{z})}}{2} \\
&= \frac{e^{-2y} + e^{2y}}{2} \\
&= \cosh(2y).
\end{aligned}$$

(d) Mais uma vez utilizando a definição das funções trigonométricas complexas

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z &= \Big(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\Big)^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(e^{2iz}+2+e^{-2iz}-e^{2iz}+2-e^{-2iz}\Big) = 1\end{aligned}$$

(e) Outra vez utilizando a definição das funções trigonométricas complexas

$$\operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} = \\ &= \frac{e^{i(z+w)}+e^{i(z-w)}-e^{i(-z+w)}-e^{-i(z+w)}}{4i} + \frac{e^{i(z+w)}-e^{i(z-w)}+e^{i(-z+w)}-e^{-i(z+w)}}{4i} = \\ &= \frac{e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)}}{2i} = \operatorname{sen}(z+w)\end{aligned}$$

(f) Ainda mais uma vez utilizando a definição das funções trigonométricas complexas

$$\begin{aligned}\cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z &= \Big(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\Big)^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(e^{2z}+2+e^{-2z}+e^{2z}-2+e^{-2z}\Big) \\ &= \frac{e^{2z}+e^{-2z}}{2} = \cosh(2z).\end{aligned}$$

2. Calcule o valor principal (i.e., tomando na função $\log z$ o ângulo correspondente à restrição principal) de:

a) $\log(-i)$; b) $\log(1-i)$; c) i^i; d) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$.

Resolução:

(a) $\log(-i) = \log(1e^{-\frac{i\pi}{2}}) = \log 1 - \dfrac{i\pi}{2} = -\dfrac{i\pi}{2}$

(b) $\log(1-i) = \log(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{1}{2}\log 2 - i\dfrac{\pi}{4}$

(c) $i^i = e^{\log(i^i)} = e^{i\log i} = e^{i\log(1e^{i\frac{\pi}{2}})} = e^{i(i\frac{\pi}{2})} = e^{-\pi/2}$

(d) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} = e^{(1+i)\log(\frac{1+i}{\sqrt{2}})} = e^{(1+i)i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}(1+i)$

3. Determine todas as soluções das seguintes equações:

a) $e^z = 2$ b) $e^{iz}+e^{-iz}+2=0$ c) $\log z = 1+2\pi i$ d) $\operatorname{sen}(2z) = 5$

Resolução:

(a) $e^z = 2 \;\Leftrightarrow\; z = \log 2 + 2k\pi i$ com $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Multiplicando todos os termos por e^{iz}, obtem-se

$$\begin{aligned} e^{2iz}+2e^{iz}+1=0 \quad &\Leftrightarrow \quad (e^{iz}+1)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz}=-1 \\ &\Leftrightarrow \quad z=\frac{1}{i}\log(-1)=-i(i\pi(2k+1))=(2k+1)\pi \end{aligned}$$

com $k\in\mathbb{Z}$.

(c) $\log z=1+2\pi i \quad \Rightarrow \quad z=e^{1+2\pi i}=e$

Nota: $\log e=1+2\pi i$, apenas com uma escolha adequada do ramo do logaritmo.

(d) Pela definição de seno

$$\operatorname{sen}(2z)=5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^{2iz}-e^{-2iz}}{2i}=5$$

e multiplicando todos os termos da equação por e^{2iz}

$$e^{4iz}-10ie^{2iz}-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2iz}=\frac{10i\pm\sqrt{-96}}{2}=(5\pm 2\sqrt{6})i$$

Então

$$2iz=\log((5\pm 2\sqrt{6})i)+2k\pi i \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

Finalmente, dado que $5\pm 2\sqrt{6}$ são ambos positivos,

$$z=\frac{-i}{2}\left(\log(5\pm 2\sqrt{6})+i\frac{\pi}{2}\right)+k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

ou seja

$$z=\frac{\pi}{4}+k\pi-\frac{i}{2}\Big(\log(5\pm 2\sqrt{6}) \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

4. Determine o conjunto dos pontos do plano complexo onde as seguintes funções admitem derivada:

   (a) $xy-ix$ (b) z^2-3z (c) $z-\bar{z}$ (d) $\overline{e^{z}}$ (e) $\operatorname{Im}(z^2)$.

Resolução:

(a) Sendo $f(x+iy)=xy-ix$, verifica-se que

$$\operatorname{Re}f\equiv u(x,y)=xy \quad , \quad \operatorname{Im}f\equiv v(x,y)=-x$$

e como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Atendendo a que todas as derivadas parciais são contínuas, f será diferenciável no conjunto de pontos onde se verifiquem as condições de Cauchy-Riemann. Tem-se então que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$$

pelo que f é diferenciável apenas no ponto $z=1+i0$, e

$$f'(1+0i)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(0,1)=-i$$

(b) Sendo $f(z) = z^2 - 3z = (x+iy)^2 - 3(x+iy) = x^2 - y^2 - 3x + i(2xy - 3y)$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f \equiv u(x,y) = x^2 - y^2 - 3x \quad , \quad \mathrm{Im} f \equiv v(x,y) = 2xy - 3y$$

e como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 3$$

É óbvio que as condições de Cauchy-Riemann são verificadas para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e atendendo a que todas as derivadas parciais são contínuas, f é diferenciável em $\mathbb{C}$, e

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2x - 3 + i2y = 2z - 3$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

(c) Sendo $f(z) = z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f \equiv u(x,y) = 0 \quad , \quad \mathrm{Im} f \equiv v(x,y) = 2y$$

como tal, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2$$

Dado que, a condição $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ não se verfica para nenhum $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, o domínio de diferenciabilidade de f é o conjunto vazio.

(d) Sendo $f(z) = \overline{e^z} = \overline{e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y} = e^x \cos y - ie^x \operatorname{sen} y$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f \equiv u(x,y) = e^x \cos y \quad , \quad \mathrm{Im} f \equiv v(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y$$

como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \operatorname{sen} y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^x \cos y$$

Para que se verifiquem as condições de Cauchy- Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^x \cos y = -e^x \cos y \\ -e^x \operatorname{sen} y = e^x \operatorname{sen} y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos y = 0 \\ \operatorname{sen} y = 0 \end{cases}$$

Atendendo a que as funções seno e coseno nunca se anulam simultâneamente, tem-se que o domínio de diferenciabilidade é o conjunto vazio.

(e) Sendo $f(z) = \mathrm{Im} z^2 = \mathrm{Im}(x^2 - y^2 + i2xy) = 2xy$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f \equiv u(x,y) = 2xy \quad , \quad \mathrm{Im} f \equiv v(x,y) = 0$$

como tal, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

É imediato verificar que as derivadas parciais de u e v são contínuas em $\mathbb{R}^2$, e que as equações de Cauchy Riemann se verificam apenas no ponto $(0,0)$, pelo que a função admite derivada apenas em $z = 0$, e

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0$$

5. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2i|xy|$.

   (a) Estude a analiticidade de $f(z)$.

   (b) Calcule $f'(z)$ nos pontos onde f é analítica.

   Resolução:

   (a) Começemos por estudar o conjunto dos pontos onde f é $\mathbb{C}$-diferenciável. Podemos escrever

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi & \text{se } \ xy \geq 0 \\ x^2 - y^2 - 2xyi & \text{se } \ xy < 0 \end{cases}$$

pelo que, se $xy \geq 0$

$$u(x,y) \equiv \text{Re} f(x,y) = x^2 - y^2 \quad , \quad v(x,y) \equiv \text{Im} f(x,y) = 2xy$$

e se $xy < 0$

$$u(x,y) \equiv \text{Re} f(x,y) = x^2 - y^2 \quad , \quad v(x,y) \equiv \text{Im} f(x,y) = -2xy$$

Temos então que se $xy > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

e as condições de Cauchy-Riemann verificam-se para todo (x,y) tais que $xy > 0$. Dado que as derivadas parciais de u e v são contínuas na mesma região, conclui-se que f é diferenciável em $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re} z \cdot \text{Im} z > 0\}$.

No caso em que $xy < 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x$$

e as condições de Cauchy- Riemann não se verificam nesta região.

Por outro lado, observe que a função $v(x,y) = 2|xy|$ não é diferenciável em $x \neq 0$ e $y = 0$, nem em $x = 0$ e $y \neq 0$, mas é diferenciável na origem, onde mais uma vez são satisfeitas as condições de Cauchy-Riemann.

Assim, concluímos que os pontos onde f possui $\mathbb{C}$-derivada são:

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Re} z \cdot \text{Imz} > 0\} \cup \{0\}.$$

O maior aberto aonde f é diferenciável é a região de analiticidade de f:

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Re} z \cdot \text{Imz} > 0\}.$$

(b) Para z na região de analiticidade $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re} z \cdot \text{Imz} > 0\}$ temos:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2x + i2y = 2z.$$

6. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são verificadas em $(x,y) = (0,0)$.

(b) Verifique, utilizando a definição, que $f'(0)$ não existe.

(c) Porquê que isto não contradiz o Teorema de Cauchy-Riemann?

Resolução:

(a) Atendendo à definição de f, podemos escrever

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad , \quad v(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tem-se então

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0)-u(0,0)}{h} = 1 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(0,h)-u(0,0)}{h} = -1$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{v(h,0)-v(0,0)}{h} = 1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{v(0,h)-v(0,0)}{h} = 1,$$

É então óbvio que as condições de Cauchy-Riemann se verificam em $(x,y) = (0,0)$.

(b) Por definição

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}}{x+iy}$$

Fazendo z convergir para 0 no eixo real (o que significa $x \to 0$ e $y = 0$), obtem-se

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x+ix}{x} = 1+i$$

enquanto que, fazendo z convergir para 0 na recta $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z = \mathrm{Im} x\}$ (o que significa $x \to 0$ e $y = x$), obtem-se

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{ix}{x+ix} = \frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{2}$$

Como $1+i \neq \frac{1+i}{2}$ conclui-se que o limite não existe e consequentemente f não admite derivada em $z = 0$.

(c) As funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ embora tenham as derivadas parciais em $(0,0)$ não são diferenciáveis em $(0,0)$. Assim, a função f, vista como uma função de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, não é diferenciavel em $(0,0)$.

7. Mostre que se f e $\overline{f}$ são ambas inteiras, então f é constante.

Resolução:

Recordemos que se f é analítica num conjunto aberto e conexo $A \subset \mathbb{C}$ e $f'(z) = 0$, então f é constante. No nosso caso $A = \mathbb{C}$, logo basta verificar que $f'(z) = 0$.

Escrevendo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, como f é analítica em $\mathbb{C}$, concluímos que as funções u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Por outro lado, escrevendo $\overline{f}(x,y) = u(x,y) - iv(x,y)$, como $\overline{f}$ é analítica em $\mathbb{C}$, concluímos que as funções u e $-v$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Deste conjunto de equações concluímos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Mas então:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

como pretendíamos.

8. Seja $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e defina $A^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in A\}$. Se f é uma função analítica em A mostre que $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$ é uma função analítica em A^*.

Resolução:

Se escrevermos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, obtemos:

$$F(z) = \overline{f(\overline{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y) = U(x, y) + iV(x, y).$$

Ou seja, $U(x, y) = u(x, -y)$ e $V(x, y) = -v(x, -y)$. Como u e v são funções diferenciáveis em A, segue-se que U e V são funções diferenciáveis em A^*. Por outro lado, verificamos que U e V satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em A^* da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}u(x, -y) \\
&= \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x,-y)} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x,-y)} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(-v(x, -y)) = \frac{\partial V}{\partial y}, \\
\frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}u(x, -y) \\
&= -\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,-y)} = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x,-y)} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}(-v(x, -y)) = -\frac{\partial V}{\partial x},
\end{aligned}$$

onde utilizámos que u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Assim, podemos concluir que F é analítica em A^*.