Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

20 de Fevereiro de 2006

Semana 3

1. Determine os valores dos seguintes integrais:

   a) $\int_C |z|\, dz$ em que C é o semicírculo percorrido em sentido directo unindo $-2i$ a $2i$.

   b) $\int_C z\cos z^2 dz$ em que C é o segmento de recta unindo 0 a πi.

   Resolução:

   (a) Uma parametrização possível para C é

$$z(\theta) = 2e^{i\theta} \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

   pelo que

$$\int_C |z|\, dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |2e^{i\theta}|\, 2ie^{i\theta} d\theta = 8i$$

   (b) Uma parametrização possível para C é

$$z(t) = it \quad , \quad 0 \leq t \leq \pi$$

   pelo que

$$\int_C z\cos z^2\, dz = \int_0^{\pi} it\cos(-t^2)i\, dt = -\frac{\operatorname{sen}(\pi^2)}{2}$$

   Note-se que atendendo ao facto da função $z\cos z^2$ ser analítica na região interior a C (de facto é uma função inteira), podemos utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo para concluir que

$$\int_C z\cos z^2\, dz = \frac{1}{2}\operatorname{sen} z^2\Big|_0^{\pi i} = -\frac{\operatorname{sen}(\pi^2)}{2}$$

2. Considere o caminho γ_1 que consiste no segmento de recta unindo o ponto inicial 0 ao ponto final $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, e considere também o caminho γ_2 entre esses mesmos pontos dado pela parábola $t \mapsto t + it^2$.

   a) Calcule, utilizando a definição, $\int_{\gamma_k} e^z dz$, com $k = 1, 2$.

   b) Calcule $\int_{\gamma_k} \bar{z}^2 dz$ com $k = 1, 2$.

c) Comente os resultados que obteve nas alíneas anteriores.

Resolução:

Observe-se primeiro que $\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i$. Com $t \in [0,1]$, parametrizações possíveis são: $\gamma_1(t) = (1-t)0 + t(1+i) = t + ti$ e $\gamma_2(t) = t + t^2 i$.

a)
$$\int_{\gamma_1} e^z dz = \int_0^1 e^{t(1+i)}(1+i)\,dt = e^{t(1+i)}\Big|_0^1 = e^{1+i} - 1$$
e
$$\int_{\gamma_2} e^z dz = \int_0^1 e^{t+it^2}(1+2ti)dt = e^{t+it^2}\Big|_0^1 = e^{1+i} - 1$$

b)
$$\int_{\gamma_1} \bar{z}^2 dz = \int_0^1 (t-ti)^2(1+i)dt = (1-i)^2(1+i)\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(1-i)$$
e
$$\int_{\gamma_2} \bar{z}^2 dz = \int_0^1 (t-t^2 i)^2(1+2ti)dt = \int_0^1 (t^2 + 3t^4 - 2it^5)\,dt = \frac{14}{15} - \frac{i}{3}$$

c) A função $z \mapsto e^z$ é holomorfa em $\mathbb{C}$ e portanto o integral é independente do caminho (consequência do Teorema de Cauchy). Pode-se notar ainda que nestas condições é válido o Teorema Fundamental e portanto
$$\int_{\gamma_1} e^z dz = e^z\big|_0^{1+i} = e^{1+i} - 1$$
Por outro lado, a função $f(z) = \bar{z}^2$ não é holomorfa em nenhum ponto de $\mathbb{C}$ (porquê?), e portanto os integrais sobre caminhos homotópicos podem depender dos caminhos, o que sucede no presente exercício.

3. Seja
$$f(z) = z^{-1+i} = \exp[(-1+i)\log z] \quad , \quad |z| > 0 \;\text{ e }\; 0 < \arg z < 2\pi$$
Calcule
$$\oint_{|z|=1} f(z)\,dz$$
onde a curva é percorrida no sentido positivo.

Resolução:

Começamos por notar que a função integranda não é analítica no semi-eixo real negativo. Uma parametrização possível para a curva será $z(t) = e^{it}$ com $0 < t < 2\pi$. Assim

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} f(z)\,dz &= \int_0^{2\pi} \exp[(-1+i)\log z(t)]z'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \exp[(-1+i)it]ie^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} i\exp[(-1+i)it + it]dt \\
&= \int_0^{2\pi} ie^{-t}dt = (-ie^{-t})\Big|_0^{2\pi} = i(1 - e^{-2\pi})
\end{aligned}$$

4. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi$. Mostre que se $R > 2$, então

$$\Big| \int_\gamma \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \Big| \leq \pi \frac{R(2R^2+1)}{(R^2-1)(R^2-4)}$$

Resolução:

Utilizando a parametrização sugerida

$$\begin{aligned}
\Big| \int_\gamma \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \Big| &= \Big| \int_0^\pi \frac{2R^2e^{12t} - 1}{R^4e^{i4t} + 5R^2e^{i2t} + 4} Rie^{it} dt \Big| \\
&\leq \int_0^\pi \frac{|2R^2e^{12t} - 1|}{|R^4e^{i4t} + 5R^2e^{i2t} + 4|} |Rie^{it}| dt \\
&\leq \int_0^\pi \frac{|2R^2e^{12t}| + |-1|}{|(R^2e^{i2t} - 1)(R^2e^{i2t} - 4)|} R\, dt \\
&\leq \int_0^\pi \frac{(2R^2+1)R}{(|R^2e^{i2t}| - |-1|)(|R^2e^{i2t}| - |-4|)} dt \\
&= \int_0^\pi \frac{(2R^2+1)R}{(R^2-1)(R^2-4)} dt = \pi \frac{R(2R^2+1)}{(R^2-1)(R^2-4)}
\end{aligned}$$

como se queria mostrar.

5. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a elipse $|z - \pi i| + |z - 2\pi i| = \frac{7\pi}{2}$, percorrida no sentido positivo. Calcule

(a) $\oint_\Gamma z^3 \cosh z \, dz$ (b) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{ze^{-z}}{z - \frac{i}{2}} dz$ (c) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{1}{z^2 + \pi^2} dz$

(d) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{5z - \pi i}{z^2(2z - \pi i)} dz$ (e) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{dz}{z^2(z - 2\pi i)^3}$ (f) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{\cos z}{(z - i\pi)^{11}} dz$

Resolução:

(a) Dado que $z^3 \cosh z$ é uma função inteira e Γ é uma curva fechada, regular e simples, podemos usar o Teorema de Cauchy e concluir que

$$\oint_\Gamma z^3 \cosh z \, dz = 0$$

(b) A função $\dfrac{ze^{-z}}{z - \frac{i}{2}}$ é o quociente de funções inteiras, pelo que será analítica no conjunto $\mathbb{C} \setminus \{z : z - \frac{i}{2} = 0\}$, ou seja em $\mathbb{C} \setminus \{\frac{i}{2}\}$. Resta-nos averiguar, qual a posição do ponto $\frac{i}{2}$ relativamente à elipse. Atendendo a que

$$\Big|\frac{i}{2} - i\pi\Big| + \Big|\frac{i}{2} - 2\pi i\Big| = 3\pi - 1 < \frac{7\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2}$$

tem-se que $\frac{i}{2}$ pertence à região interior a Γ. Dado que ze^{-z} é uma função inteira e Γ é uma curva fechada, regular e simples, aplicando a fórmula integral de Cauchy obtemos

$$\oint_\Gamma \frac{ze^{-z}}{z-\frac{i}{2}}\,dz = 2\pi i z e^{-z}\Big|_{z=i/2} = -\pi e^{-i/2}$$

(c) A função $\dfrac{1}{z^2+\pi^2}$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{-\pi i,\pi i\}$, e atendendo a que

$$|\pi i-\pi i|+|\pi i-2\pi i| = \pi < 7\pi/2 \quad \text{e} \quad |-\pi i-\pi i|+|-\pi i-2\pi i| = 5\pi > 7\pi/2$$

tem-se que $-\pi i$ não pertence à região interior a Γ e πi pertence à região interior a Γ. Escrevendo

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z^2+\pi^2}dz = \oint_\Gamma \frac{\frac{1}{z+\pi i}}{z-\pi i}dz$$

e atendendo a que a função $\frac{1}{z+\pi i}$ é analítica na região interior a Γ, tem-se, por aplicação da Fórmula Integral de Cauchy

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z^2+\pi^2}dz = 2\pi i\,\frac{1}{z+\pi i}\Big|_{z=i\pi} = 1$$

(d) A função $\dfrac{5z-\pi i}{z^2(2z-\pi i)}$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0,\frac{\pi i}{2}\}$, e atendendo a que

$$|0-\pi i|+|0-2\pi i| = 3\pi < 7\pi/2 \quad \text{e} \quad |\frac{\pi i}{2}-\pi i|+|\frac{\pi i}{2}-2\pi i| = 2\pi < 7\pi/2$$

tem-se que tanto 0 como $\frac{\pi i}{2}$ pertencem à região interior a Γ. Podemos escrever

$$\oint_\Gamma \frac{5z-\pi i}{z^2(2z-\pi i)}dz = \oint_{\Gamma_1} \frac{5z-\pi i}{z^2(2z-\pi i)}dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{5z-\pi i}{z^2(2z-\pi i)}dz$$

em que (por exemplo)

$$\Gamma_1 = \{z\,:\,|z|<\frac{1}{2}\} \quad \text{e} \quad \Gamma_2 = \{z\,:\,|z-\frac{\pi i}{2}|<\frac{1}{2}\}$$

Então

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \frac{5z-\pi i}{z^2(2z-\pi i)}dz &= \oint_{\Gamma_1} \frac{5z-\pi i}{z^2(2z-\pi i)}dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{5z-\pi i}{z^2(2z-\pi i)}dz \\ &= \oint_{\Gamma_1} \frac{\frac{5z-\pi i}{2z-\pi i}}{z^2}dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{5z-\pi i}{z^2}}{2z-\pi i}dz\end{aligned}$$

Dado que a função $\dfrac{5z-\pi i}{2z-\pi i}$ é analítica na região interior a Γ_1, tem-se, por aplicação da Fórmula Integral de Cauchy para as derivadas ($n=2$)

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{\frac{5z-\pi i}{2z-\pi i}}{z^2}dz = 2\pi i\Big(\frac{5z-\pi i}{2z-i\pi}\Big)'\Big|_{z=0} = -6$$

Por outro lado, dado que a função $\dfrac{5z-\pi i}{z^2}$ é analítica na região interior a Γ_2, tem-se, por aplicação da Fórmula Integral de Cauchy

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{5z-\pi i}{z^2}}{2z-\pi i}dz = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{5z-\pi i}{z^2}}{z-\frac{\pi i}{2}}dz = \pi i \frac{5z-\pi i}{z^2}\Big|_{z=\pi i/2} = 6$$

Finalmente

$$\oint_{\Gamma} \frac{5z-\pi i}{z^2(2z-\pi i)}dz = -6+6 = 0$$

(e) Seguindo os passos da alínea anterior, a função $\dfrac{1}{z^2(z-2\pi i)^3}$ é analítica em $\mathbb{C}\backslash\{0, 2\pi i\}$, e é fácil de verificar que tanto 0 como $2\pi i$ pertencem à região interior a Γ. Podemos escrever

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2(z-2\pi i)^3}dz = \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{z^2(z-2\pi i)^3}dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{1}{z^2(z-2\pi i)^3}dz$$

em que (por exemplo)

$$\Gamma_1 = \{z \,:\, |z| < \frac{1}{2}\} \quad \text{e} \quad \Gamma_2 = \{z \,:\, |z-2\pi i| < \frac{1}{2}\}$$

Então

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2(z-2\pi i)^3}dz &= \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{z^2(z-2\pi i)^3}dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{1}{z^2(z-2\pi i)^3}dz \\ &= \oint_{\Gamma_1} \frac{\frac{1}{(z-2\pi i)^3}}{z^2}dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{1}{z^2}}{(z-2\pi i)^3}dz\end{aligned}$$

Dado que a função $\frac{1}{(z-2\pi i)^3}$ é analítica na região interior a Γ_1, tem-se, por aplicação da Fórmula Integral de Cauchy para as derivadas ($n=2$)

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{\frac{1}{(z-2\pi i)^3}}{z^2}dz = 2\pi i\Big(\frac{1}{(z-2\pi i)^3}\Big)'\Big|_{z=0} = -\frac{3i}{8\pi^3}$$

Por outro lado, dado que a função $\frac{1}{z^2}$ é analítica na região interior a Γ_2, tem-se, por aplicação da Fórmula Integral de Cauchy para as derivadas ($n=3$)

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{1}{z^2}}{(z-2\pi i)^3}dz = \frac{2\pi i}{2}\Big(\frac{1}{z^2}\Big)''\Big|_{z02\pi i} = \frac{3i}{8\pi^3}$$

Finalmente

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2(z-2\pi i)^3}dz = -\frac{3i}{8\pi^3} + \frac{3i}{8\pi^3} = 0$$

(f) A função $\dfrac{\cos z}{(z-i)^{11}}$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ e é fácil de verificar que i pertence à região interior a Γ. Pela fórmula integral de Cauchy para as derivadas ($n=10$)

$$\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z-i)^{11}}\,dz = 2\pi i\frac{1}{10!}(\cos z)^{(10)}\Big|_{z=i} = -\frac{2}{10!}\pi i\cos i$$

6. Considere a função complexa definida por

$$f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y + i\left(x^2 - y^2 + 2xy - 2x\right).$$

Justificando pormenorizadamente a sua resposta, determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2}\, dz,$$

onde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 4\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

Começemos por analisar o domínio de analiticidade da função integranda $\frac{f(z)}{(z-2)^2}$, pelo que necessitamos de saber quais os pontos de $\mathbb{C}$ onde a func c ao f admite derivada. Sendo

$$\mathrm{Re} f = u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y \quad \text{e} \quad \mathrm{In} f = v(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - 2x$$

tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 2x + 2 \ , \ \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2y - 2 \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = -2y + 2x$$

É óbvio que todas estas funções são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e que as condições de Cauchy Riemann se verificam para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Podemos então concluir que f é uma função inteira, pelo que $\frac{f(z)}{(z-2)^2}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. Dado que C é uma curva fechada, simples e regular, e que 2 pertence à sua região interior, por aplicação da fórmula integral de Cauchy para as derivadas ($n = 1$), concluimos

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2}\, dz = 2\pi i f'(2) = 2\pi i\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(2,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(2,0)\Big) = 2\pi i(4 + 2i)$$

7. *Teorema de Liouville:* Mostre que se f é inteira e limitada então f é constante em $\mathbb{C}$.

Sugestão: Utilize a fórmula integral de Cauchy para mostrar que $f'(z) = 0$.

Resolução:

Seguindo a sugestão, vamos demonstrar que nas condições dadas $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Visto f ser inteira, podemos aplicar a Fórmula Integral de Cauchy para concluir que

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

para qualquer curva de Jordan C percorrida uma vez no sentido directo e tal que z pertenca à sua região interior. Em particular

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

isto é, sendo C a circunferência de raio R centrada em z. Por outro lado atendendo a que f é limitada, existe $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \le M \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Tem-se então que

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|w-z|=R} \left| \frac{f(w)}{(w-z)^2} \right| |dw| \leq \frac{M}{2\pi} \oint_{|w-z|=R} \frac{1}{R^2} |dw| = \frac{M 2\pi R}{R^2} = \frac{M}{R}$$

Ou seja, dado qualquer número complexo z

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R} \quad , \quad \forall R \in \mathbb{R}^+$$

Visto R ser arbitrário, quando $R \to \infty$

$$|f'(z)| \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |f'(z)| = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(z) = 0$$

Seja $f = u + iv$. Como $f'(z) = 0$, resulta do teorema de Cauchy-Riemann que todas as derivadas parciais de u e v são nulas para qualquer $z \in \mathbb{C}$, Desta forma, f é constante em $\mathbb{C}$.