Análise Matemática IV - 2003/04

Problemas para as Aulas Práticas

20 de Fevereiro de 2006

Semana 4

1. Considere a seguinte função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy(x+y)$$

   (a) Mostre que u é uma função harmónica.

   (b) Determine a função harmónica conjugada v tal que $v(0,0) = 0$.

   (c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz \qquad \text{e} \qquad \oint_C \frac{f(z)}{z^3}\,dz$$

   onde $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ e C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ percorrida no sentido positivo.

2. Considere a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z(z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2)$, e sejam u e v funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tais que $u(x,y) = \mathrm{Re}\,[g(x+iy)]$ e $v(x,y) = \mathrm{Im}\,[g(x+iy)]$.

   (a) Determine o conjunto dos pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy–Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função g?

   (b) Mostre que u é uma função harmónica.

   (c) Determine uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, analítica em $\mathbb{C}$, tal que $\mathrm{Re}\,(f) = u$.

3. Calcule a região de convergência das seguintes séries de potências:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - i\sqrt{2}\right)^n}{n^4+1}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z+1-i)^n$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(z+1)^n$

4. Considere a seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad \text{onde} \qquad a_n = \begin{cases} 5^n & \text{se } n \text{ par} \\ (-2)^n & \text{se } n \text{ impar} \end{cases}.$$

   Sabendo que esta é a série de Taylor em torno de $z_0 = 0$ de uma função f, analítica em todo o seu domínio, calcule $f(1)$.

5. Determine os desenvolvimentos de Taylor das seguintes funções em torno dos seguintes pontos:

   (a) $\operatorname{sen} z$, em torno de $z = \pi$.

   (b) e^{2z} , em torno de $z = i\pi$.

   (c) $z^2 e^z$, em torno de $z = 1$.

   (d) Valor principal de $\log z$, em torno de $z = i - 1$.

6. Para cada função e região indicada, determine as séries de Laurent respectivas:

   (a) $\frac{1}{z-1}$, $|z| > 1$.

   (b) $z^5\left(e^{\frac{1}{z}} + z\right)$, $|z| > 0$.

   (c) $\frac{z-i}{(z-2i)^2}$, $|z - i| > 1$.

   (d) $\left(3z^2 - 1\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z^3 + z}{z^3}\right)$, $|z| > 0$.

7. Determine a série de Laurent de $\frac{1}{\left(z^2-1\right)^2}$ nas seguintes regiões:

   (a) $0 < |z - 1| < 2$.

   (b) $2 < |z - 1|$.

   e calcule os seguintes integrais:

   (a) $\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{\left(z^2-1\right)^2}\, dz$.

   (b) $\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{\left(z^2-1\right)^2}\, dz$

8. Seja $P(z)$ um polinómio e γ uma curva simples e fechada em $\mathbb{C}$, percorrida uma vez no sentido directo, e que não intersecta o conjunto dos zeros de $P(z)$. Mostre que o valor de

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz$$

é igual ao número de zeros (contando multiplicidades) de $P(z)$ que pertencem ao interior da curva γ.