

Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 6

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

a) $\frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$ b) $\psi' = \psi - t$

c) $x \frac{dy}{dx} + 2y = (x - 2)e^x$ d) $\frac{di}{dt} - 6i = 10 \operatorname{sen}(2t)$

e) $\frac{dy}{dt} = y\left(\frac{1}{t} - \operatorname{tg} t\right) + t \cos t$ f) $(1 + y^2) \frac{dx}{dy} = \operatorname{arctg} y - x$

Resolução:

(a) Trata-se de uma equação linear em y , admite um factor integrante, $\mu(x)$ dado pela equação

$$\mu' = \mu \Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = 1 \Leftrightarrow \log \mu = x \Leftrightarrow \mu = e^x$$

Multiplicando ambos os membros da equação por μ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(e^x y) &= (2 + 2x)e^x \Leftrightarrow e^x y = \int (2 + 2x)e^x dx + c \\ &\Leftrightarrow y(x) = e^{-x} (2xe^x + c) \\ &\Leftrightarrow y(x) = 2x + ce^{-x} \end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(b) A equação é equivalente a

$$\psi' - \psi = -t \tag{1}$$

Esta equação admite um factor integrante, $\mu(t)$ dado por

$$\mu' = -\mu \Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -1 \Leftrightarrow \log \mu = -t \Leftrightarrow \mu = e^{-t}$$

Multiplicando ambos os membros da equação (1) por μ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-t}\psi) &= -te^{-t} \Leftrightarrow e^{-t}\psi = -\int te^{-t} dt + c \Leftrightarrow \psi(t) = e^t (te^{-t} + e^{-t} + c) \\ &\Leftrightarrow \psi(t) = t + 1 + ce^t \end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(c) Para $x \neq 0$, a equação pode ser escrita na forma

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{(x-2)}{x}e^x \quad (2)$$

Trata-se de uma equação linear, e admite um factor integrante, $\mu(x)$ dado por

$$\mu' = \frac{2}{x}\mu \Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \log \mu = 2 \log x \Leftrightarrow \mu = x^2$$

Multiplicando ambos os membros da equação (2) por μ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2y) &= (x^2 - 2x)e^x \Leftrightarrow x^2y = \int (x^2 - 2x)e^x dx + c \\ &\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{x^2} \left((x^2 - 4x + 4)e^x + c \right) \end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(d) Trata-se de uma equação linear em i , admite um factor integrante, $\mu(t)$ dado pela equação

$$\mu' = -6\mu \Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -6 \Leftrightarrow \log \mu = -6t \Leftrightarrow \mu = e^{-6t}$$

Multiplicando ambos os membros da equação por μ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(e^{-6t}i) &= 10e^{-6t} \operatorname{sen}(2t) \Leftrightarrow e^{-6t}i = \int 10e^{-6t} \operatorname{sen}(2t) dt + c \\ &\Leftrightarrow i(t) = ce^{6t} - \frac{1}{2}(\cos(2t) + 3 \operatorname{sen}(2t)) \end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(e) Para $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a equação é equivalente a

$$\frac{dy}{dt} - y\left(\frac{1}{t} - \operatorname{tg} t\right) = t \cos t \quad (3)$$

Esta equação admite um factor integrante, $\mu(t)$ dado por

$$\mu' = -\left(\frac{1}{t} - \operatorname{tg} t\right)\mu \Leftrightarrow \log \mu = -\log t - \log \cos t \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{t \cos t}$$

Multiplicando ambos os membros da equação (5) por μ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{t \cos t}\right) &= 1 \Leftrightarrow \frac{y}{t \cos t} = t + c \\ &\Leftrightarrow y(t) = t(t + c) \cos t \end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(f) A equação é equivalente a

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2} \operatorname{arctg} y \quad (4)$$

Esta equação admite um factor integrante, $\mu(y)$ dado por

$$\mu' = \frac{1}{1+y^2} \mu \Leftrightarrow \log \mu = \operatorname{arctg} y \Leftrightarrow \mu = e^{\operatorname{arctg} y}$$

Multiplicando ambos os membros da equação (5) por μ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}(e^{\operatorname{arctg} y} x) &= \frac{1}{1+y^2} \operatorname{arctg} y e^{\operatorname{arctg} y} \Leftrightarrow e^{\operatorname{arctg} y} x = \operatorname{arctg} y e^{\operatorname{arctg} y} - e^{\operatorname{arctg} y} + c \\ &\Leftrightarrow x(y) = \operatorname{arctg} y - 1 + ce^{-\operatorname{arctg} y} \end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

2. Determine as soluções dos seguintes problemas de Cauchy

a) $xy' = 2y + x^3 e^x$, $y(1) = 0$.

b) $\frac{dv}{du} + \frac{2u}{1+u^2}v - \frac{1}{1+u^2} = 0$, $v(0) = 1$.

c) $\begin{cases} x' + h(t)x - t = 0, \\ x(-1) = 2 \end{cases}$, com $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

Resolução:

(a) Para $x \neq 0$, a equação é equivalente a

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 e^x$$

Admite como factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$$

Tem-se então que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} y \right) = e^x \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} y = e^x + c$$

$$\Leftrightarrow y(x) = x^2(e^x + c)$$

Dado que $y(1) = 0$, teremos

$$0 = e + c \Leftrightarrow c = -e$$

e a solução do PVI é

$$y(x) = x^2(e^x - e)$$

(b) A equação é equivalente a

$$\frac{dv}{du} + \frac{2u}{1+u^2}v = \frac{1}{1+u^2} \quad (5)$$

que admite um factor integrante, $\mu(t)$, dado pela equação

$$\mu' = \frac{2u}{1+u^2}\mu \Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{2u}{1+u^2} \Leftrightarrow \log \mu = \log(1+u^2) \Leftrightarrow \mu = 1+u^2$$

Multiplicando ambos os membros da equação (5) por μ obtemos

$$\frac{d}{du}((1+u^2)v) = 1 \Leftrightarrow (1+u^2)v = u + c \Leftrightarrow v(u) = \frac{u+c}{1+u^2}$$

Dado que $v(0) = 1$ tem-se

$$1 = c$$

e a solução do PVI é

$$v(u) = \frac{u+1}{u^2+1}$$

(c) Começemos por resolver o PVI

$$\begin{cases} x' - t = 0 \\ x(-1) = 2 \end{cases}$$

definida para $t < 0$. Dado que

$$x' = t \Leftrightarrow x(t) = \frac{t^2}{2} + c$$

e como $x(-1) = 2$, tem-se que

$$2 = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$$

e a solução é

$$x(t) = \frac{t^2+3}{2}, \quad t < 0$$

Por outro lado, para $t > 0$, teremos que resolver o PVI

$$\begin{cases} x' + tx - t = 0 \\ x(0) = \frac{t^2+3}{2} \Big|_{t=0} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

onde a condição inicial força a continuidade da solução em 0. A equação é equivalente a

$$x' + tx = t \quad (6)$$

que admite um factor integrante, $\mu(t)$ dado pela equação

$$\mu' = t\mu \Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = t \Leftrightarrow \log \mu = \frac{t^2}{2} \Leftrightarrow \mu = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Multiplicando ambos os membros da equação (6) por μ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{\frac{t^2}{2}}x) = te^{\frac{t^2}{2}} &\Leftrightarrow e^{\frac{t^2}{2}}x = \int te^{\frac{t^2}{2}}dt + c \Leftrightarrow x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(e^{\frac{t^2}{2}} + c\right) \\ &\Leftrightarrow x(t) = 1 + ce^{-\frac{t^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dado que $x(0) = \frac{3}{2}$, tem-se

$$\frac{3}{2} = 1 + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

e a solução do PVI é

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t \geq 0$$

Finalmente a solução pedida é

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t^2+3}{2} & \text{se } t < 0 \\ 1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

A função x é por construção contínua. Para concluir o problema há que verificar que é continuamente diferenciável. Note-se que

$$x'(t) = t \text{ se } t < 0 \quad \text{e} \quad x'(t) = -\frac{t}{2}e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ se } t > 0$$

e que

$$x'(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{x(t) - x(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{3}{2}}{t} = 0$$

e

$$x'(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{x(t) - x(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2+3}{2} - \frac{3}{2}}{t} = 0$$

Então

$$x'(t) = \begin{cases} t & \text{se } t < 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ -\frac{t}{2}e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

É agora simples de verificar que $x'(t)$ é uma função contínua em \mathbb{R} .

3. De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a taxa de arrefecimento de uma substância numa corrente de ar, é proporcional à diferença entre a temperatura da substância e a do ar. Assumindo que a temperatura do ar é 30° e que a substância arrefece de 100° para 70° em 15m, determine o tempo que a substância demora a atingir a temperatura de 40° .

Resolução:

Sendo $T(t)$ a função que representa temperatura da substância no instante t , temos que

$$\dot{T} = -k(T - 30), \quad T(0) = 100$$

em que t é medido em minutos, e k é a constante de proporcionalidade. Trata-se de uma equação linear não homogênea, de factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int -k dt} = e^{-kt}$$

Multiplicando todos os termos da equação por $\mu(t)$

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-kt} T \right) = -30k e^{-kt} \Leftrightarrow e^{-kt} T = 30e^{-kt} + c \Leftrightarrow T(t) = 30 + c e^{kt}$$

Como $T(0) = 100$, concluímos que

$$T(t) = 30 + 70e^{kt}$$

Atendendo também a que $T(15) = 70$, virá

$$70 = 30 + 70e^{15k} \Leftrightarrow k = \frac{\log(4/7)}{15}$$

Pretende-se determinar o instante em que a temperatura da substância é de 40° , isto é,

$$T(t) = 40 \Leftrightarrow 30 + 70e^{kt} = 40 \Leftrightarrow kt = \log 1/7 \Leftrightarrow t = \frac{15 \log(1/7)}{\log(4/7)}$$

Pelo que a temperatura da substância será 40° ao fim de aproximadamente 52m.

4. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

a) $x' = \frac{2}{t^2-1}$, $|t| \neq 1$.

b) $x^3 + (y+1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$

c) $\varphi' = e^{\varphi-t}$.

d) $xy + (1+x^2)y' = 0$

e) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$.

Resolução:

(a) Dado que o segundo membro não depende de x , a solução é dada por

$$x(t) = \int \frac{2}{t^2-1} dt \Leftrightarrow x(t) = \log \left(\frac{t-1}{t+1} \right) + c$$

com $c \in \mathbb{R}$.

(b) Trata-se de uma equação separável; como tal, é equivalente à equação

$$(y+1)^2 \frac{dy}{dx} = -x^3 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\int (y+1)^2 dy \right) = -x^3 \Leftrightarrow \frac{(y+1)^3}{3} = -\frac{x^4}{4} + c$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \sqrt[3]{k - \frac{3x^4}{4}} - 1$$

com $k \in \mathbb{R}$.

(c) Trata-se de uma equação separável, como tal, é equivalente a

$$\varphi' = e^\varphi e^{-t} \Leftrightarrow e^{-\varphi} \varphi' = e^{-t} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\int e^{-\varphi} d\varphi \right) = e^{-t} \Leftrightarrow -e^{-\varphi} = -e^{-t} + C$$

Resolvendo a equação em ordem a φ , obtém-se a solução geral da equação

$$\varphi(t) = -\log(e^{-t} - c)$$

(d) Para $y \neq 0$, a equação pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = -\frac{x}{1+x^2} &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\int \frac{1}{y} dy \right) = -\frac{x}{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow \log y = -\frac{1}{2} \log(1+x^2) + c \\ &\Leftrightarrow y(x) = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Note-se que a função nula, $y(x) \equiv 0$ é também solução da equação diferencial.

(e) A equação pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} y' = (1-x)(1+y^2) &\Leftrightarrow \frac{y'}{1+y^2} = 1-x \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\int \frac{dy}{y^2+1} \right) = 1-x \\ &\Leftrightarrow \operatorname{arctg} y = x - \frac{x^2}{2} + c \Leftrightarrow y = \operatorname{tg} \left(x - \frac{x^2}{2} + c \right) \end{aligned}$$

5. Resolva o problema de Cauchy $\varphi(\theta)\varphi'(\theta) = \theta$, $\varphi(1) = \alpha$. e determine para que valores de α é que a solução está definida em todo o \mathbb{R} .

Resolução:

Trata-se de uma equação diferenciável separável, pelo que

$$\varphi \varphi' = \theta \Leftrightarrow \frac{d}{d\theta} \left(\int \varphi d\varphi \right) = \theta \Leftrightarrow \frac{\varphi^2}{2} = \frac{\theta^2}{2} + c \Leftrightarrow \varphi^2 = \theta^2 + c_1$$

Para determinar c_1 , usaremos o facto de $\varphi(1) = \alpha$, pelo que

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \sqrt{\theta^2 + \alpha^2 - 1} & \text{se } \alpha \geq 0 \\ -\sqrt{\theta^2 + \alpha^2 - 1} & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Pretende-se agora determinar quais os valores de α para os quais o intervalo máximo de existência de solução do PVI seja \mathbb{R} . Note-se que para tal, o domínio da função φ' terá que ser \mathbb{R} , pelo que

$$\theta^2 + \alpha^2 - 1 > 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

o que acontecerá se $\alpha^2 - 1 > 0$ isto é se $|\alpha| > 1$.

6. Considere a equação diferencial não-linear separável $x' = x \operatorname{sen} t + x^2 \operatorname{sen} t$. Determine a solução desta equação que satisfaz a condição inicial $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, e determine o seu intervalo máximo de existência.

Resolução:

A equação pode ser escrita na forma

$$x' = (x + x^2) \operatorname{sen} t$$

Para $x \neq 0$ e $x \neq -1$ (podemos excluir estes dois casos visto que $x(t) \equiv 0$ e $x(t) \equiv -1$ são soluções constantes da equação que não verificam a condição inicial), tem-se

$$\frac{x'}{x + x^2} = \operatorname{sen} t \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \int \left(\frac{dx}{x^2 + x} \right) dx = \operatorname{sen} t \Leftrightarrow \log \frac{x}{x + 1} = -\cos t + c \Leftrightarrow \frac{x}{x + 1} = k e^{-\cos t}$$

Visto $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, temos que $k = 2$ e a solução do PVI é

$$x(t) = \frac{2 e^{-\cos t}}{1 - 2 e^{-\cos t}}$$

O domínio de diferenciabilidade da função $x(t)$ é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - 2 e^{-\cos t} \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \cup_{k \in \mathbb{Z}} \{\arccos(\log 2) + 2k\pi\}$$

Teremos então que o intervalo máximo de solução será o maior **intervalo** $I \subset D$, tal que $\pi/2 \in I$. Conclui-se

$$I =] \arccos(\log 2), \arccos(\log 2) + 2\pi[$$

7. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

em que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

- Mostre que a substituição $v = at + by + c$, transforma a equação numa equação separável.
- Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2 \quad , \quad y(0) = 1$$

indicando o intervalo máximo de solução.

Resolução:

(a) Se $v = at + by + c$ e $b \neq 0$, então $y = \frac{v - at - c}{b}$. Substituindo na equação

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v - at - c}{b} \right) = f(v) \Leftrightarrow \dot{v} - a = b f(v) \Leftrightarrow \frac{\dot{v}}{b f(v) + a} = 1$$

que é obviamente uma equação separável.

(b) Por (a), sendo $f(v) = e^v - 2$, com $v = 2t + y - 1$, obtem-se

$$\frac{\dot{v}}{e^v} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\int e^{-v} dv \right) = 1 \Leftrightarrow -e^{-v} = t + k \Leftrightarrow v(t) = -\log(-t - k)$$

Desfazendo a mudança de variável

$$2t + y - 1 = -\log(-t - k) \Leftrightarrow y(t) = 1 - 2t - \log(-t - k)$$

Dado que $y(0) = 1$, obtem-se $k = -1$ e como tal a solução do PVI é

$$y(t) = 1 - 2t - \log(1 - t)$$

O domínio de diferenciabilidade da função $y(t)$ é

$$D = \{t \in \mathbb{R} : 1 - t > 0\} =] - \infty, 1[$$

o intervalo máximo de solução será o maior **intervalo** $I \subset D$, tal que $0 \in I$. Conclui-se

$$I =] - \infty, 1[$$

8. Considere a equação diferencial

$$2x \frac{dy}{dx} + 2xy^5 - y = 0$$

(a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-4}$.

(b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.

Resolução:

(a) Seguindo a sugestão, se $v = y^{-4}$ tem-se $y = v^{-1/4}$ e substituindo na equação

$$2x \frac{d}{dx} \left(v^{-1/4} \right) + 2x \left(v^{-1/4} \right)^5 - v^{-1/4} = 0 \Leftrightarrow -2x \frac{1}{4} v^{-5/4} \dot{v} + 2x v^{-5/4} - v^{-1/4} = 0$$

Multiplicando ambos os membros por $v^{5/4}$ e rearranjando os termos

$$\dot{v} + \frac{2}{x}v = 4 \tag{7}$$

que é uma equação linear não homogênea. O factor integrante é dado por

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$$

Multiplicando todos os termos da equação (7) por $\mu(x)$

$$\frac{d}{dx} (x^2 v) = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 v = \frac{4x^3}{3} + c \Leftrightarrow v(x) = \frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2}$$

Finalmente desfazendo a mudança de variável

$$y^{-4}(x) = \frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2} \Leftrightarrow y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2}}}$$

com $c \in \mathbb{R}$.

(b) Dado que $y(1) = 1$, conclui-se que $y(x)$ é positivo e $c = -1/3$. Como tal a solução do PVI é dada por

$$y(x) = \sqrt[4]{\frac{3x^2}{4x^3 - 1}}$$

O domínio de diferenciabilidade da função $y(x)$ é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \frac{3x^2}{4x^3 - 1} > 0 \text{ e } 4x^3 - 1 \neq 0\} =]\sqrt[3]{1/4}, \infty[$$

o intervalo máximo de solução será o maior **intervalo** $I \subset D$, tal que $1 \in I$. Conclui-se

$$I =]\sqrt[3]{1/4}, \infty[$$

9. Determine a solução geral da equação diferencial

$$x^2 \cos y \frac{dy}{dx} = 2x \sin y - 1$$

Sugestão: Efectue a mudança de variável $v = \sin y$

Resolução:

Seguindo a sugestão, se $v = \sin y$ tem-se $\frac{dv}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$ e substituindo na equação

$$x^2 \frac{dv}{dx} = 2xv - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = -\frac{1}{x^2}$$

para $x \neq 0$. Trata-se de uma equação linear não homogênea, de factor integrante

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$$

pelo que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} v \right) = \frac{1}{x^4} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} v = -\frac{4}{x^5} + c \Leftrightarrow v(x) = -\frac{4}{x^3} + cx^2$$

Finalmente desfazendo a mudança de variável

$$\sin y = -\frac{4}{x^3} + cx^2 \Leftrightarrow y(x) = \arcsin\left(-\frac{4}{x^3} + cx^2\right)$$

com $c \in \mathbb{R}$.