

# Análise Matemática IV

## Problemas para as Aulas Práticas

### Semana 7

1. Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty}, \quad t > 0$$

que verifica a condição inicial  $y(1) = -1$  e indique o intervalo máximo de definição da solução.

**Sugestão:** Considere a mudança de variável  $v = y/t$ .

**Resolução:**

Fazendo  $v = \frac{y}{t}$ , ou seja  $y = tv$ , obtemos

$$\frac{d}{dt}(tv(t)) = \frac{t^2 + 3(tv)^2}{2t(tv)} \Leftrightarrow v + tv' = \frac{1 + 3v^2}{2v}$$

A equação é separável, e pode ser escrita na forma

$$\frac{2v}{1+v^2}v' = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \int \frac{2v}{1+v^2} dv \right) = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \log(1+v^2) = \log t + c$$

pelo que

$$v^2(t) = kt - 1$$

Desfazendo a mudança de variável

$$y^2(t) = t^2(kt - 1)$$

e dado que  $y(1) = -1 < 0$ , a solução do PVI é

$$y(t) = -\sqrt{t^2(2t - 1)}$$

Para calcular o intervalo máximo de solução, note-se que, a equação diferencial faz sentido se  $t \neq 0$  e  $y(t) \neq 0$ . Então, o intervalo máximo de solução,  $I$ , será o maior intervalo verificando

$$t_0 = 1 \in I$$

$$0 \notin I$$

$$y(t) \neq 0 \text{ para todo } t \in I.$$

Visto

$$y(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = \frac{1}{2}$$

conclui-se que  $I = ]\frac{1}{2}, \infty[$ .

2. Determine a solução do problema de Cauchy

$$3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0 \quad , \quad x(0) = 1$$

e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.

**Resolução:**

Note-se em primeiro lugar que a equação não é linear nem separável. Resta-nos investigar se será uma equação exacta (ou reduível a exacta). A equação é da forma

$$M(t, x) + N(t, x) \frac{dx}{dt} = 0$$

em que

$$M(t, x) = 3t^2 + 4tx \quad , \quad N(t, x) = 2x + 2t^2$$

Dado que ambas as funções são polinomiais, serão de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , e

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 4t = \frac{\partial N}{\partial t}$$

concluimos que se trata de uma equação exacta, pelo que existe  $\Phi(t, x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\nabla\Phi = (M, N)$  e  $\Phi(t, x) = C$  define implicitamente a solução da equação diferencial. Para calcular  $\Phi$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 3t^2 + 4tx \Rightarrow \Phi(t, x) = \int (3t^2 + 4tx) dt = t^3 + 2t^2x + c(x)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = N(t, x) \Rightarrow 2t^2 + c'(x) = 2x + 2t^2 \Rightarrow c(x) = x^2 + c$$

Tem-se então que

$$\Phi(t, x) = t^3 + 2t^2x + x^2 = C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial. Dado que  $x(0) = 1$ , conclui-se que  $C = 1$ , e atendendo a que  $N(0, 1) = 2 \neq 0$

$$t^3 + 2t^2x + x^2 - 1 = 0$$

define implicitamente a solução do PVI para  $t$  numa vizinhança da condição inicial  $t_0 = 0$ . Resolvendo a equação em ordem a  $x$ , obtemos a solução explícita do PVI

$$x(t) = -t^2 + \sqrt{t^4 - t^3 + 1}$$

Fazendo o estudo da função

$$p(t) = t^4 - t^3 + 1$$

conclui-se que  $p$  tem dois extremos locais em  $t = 0$  e  $t = \frac{3}{4}$ . Visto  $p$  ser um polinómio de grau 4 (o que implica  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} p(t) = +\infty$ ) podemos concluir que um deles é necessariamente um mínimo absoluto. Fazendo as contas conclui-se que o minimizante é  $\frac{3}{4}$ , pelo que

$$t^4 - t^3 + 1 \geq \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 1 > 0$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ , pelo que o intervalo máximo de solução é  $\mathbb{R}$ .

3. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + (y^3 - \log x) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1)$$

- a) Verifique que (1) tem um factor integrante da forma  $\mu = \mu(y)$  e determine-o.  
 b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por  $\Phi(x, y) = C$ , onde  $C$  é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y} \log x$$

- c) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição inicial  $y(1) = \sqrt{2}$ .

**Resolução:**

(a) Sendo

$$M(x, y) = \frac{y}{x}, \quad N(x, y) = y^3 - \log x$$

é óbvio que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x}$$

pelo que teremos que investigar a existência de um factor integrante. Vamos averiguar se existirá  $\mu(y)$  (como sugerido, tal que a equação

$$\mu(y) \frac{y}{x} + \mu(y) (y^3 - \log x) \frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, isto é verifica

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu(y) \frac{y}{x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu(y) (y^3 - \log x) \right)$$

Efectuando as derivadas

$$\mu'(y) \frac{y}{x} + \mu(y) \frac{1}{x} = -\mu(y) \frac{1}{x}$$

e para  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  obtemos

$$\mu'(y) = -\frac{2}{y} \mu(y)$$

pelo que, resolvendo a equação

$$\mu(y) = y^{-2}$$

é um factor integrante da equação.

(b) Por construção, a equação

$$\frac{1}{xy} + \left( y - \frac{\log(x)}{y^2} \right) y' = 0$$

é exacta, pelo que existe  $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  verificando

$$\nabla \Phi(x, y) = \left( \frac{1}{xy}, y - \frac{\log(x)}{y^2} \right)$$

e  $\Phi(x, y) = C$  define implicitamente a solução da equação diferencial. Para calcular  $\Phi$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{xy} \Leftrightarrow \Phi(x, y) = \frac{1}{y} \log x + c(y)$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = y - \frac{\log(x)}{y^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{y^2} \log x + c'(y) = y - \frac{\log(x)}{y^2} \Leftrightarrow c(y) = \frac{y^2}{2} + c$$

e finalmente

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{y} \log x + \frac{y^2}{2} = C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial como se queria mostrar.

(c) Dado que  $y(1) = \sqrt{2}$ , tem-se  $C = 1$ , e visto  $N(1, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \neq 0$ , o Teorema da função Implícita garante existência e unicidade de solução do PVI, definida pela equação

$$\frac{1}{y} \log x + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

para  $x$  numa vizinhança de  $x_0 = 1$ .

4. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2 + 2x}$$

- Mostre que esta equação tem um factor integrante  $\mu = \mu(y)$ .
- Determine a solução que satisfaz a condição inicial  $y(1) = 1$ .
- Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

**Resolução:**

(a) A equação pode ser escrita na forma

$$y + (4y^2 + 2x) \frac{dy}{dx} = 0$$

Fazendo

$$M(x, y) = y \quad , \quad N(x, y) = 4y^2 + 2x$$

é óbvio que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2$$

pelo que teremos que investigar a existência de um factor integrante. Vamos averiguar se existirá  $\mu(y)$  (como sugerido), tal que a equação

$$\mu(y)y + \mu(y) (4y^2 + 2x) \frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, isto é verifica

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu(y)y) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu(y) (4y^2 + 2x))$$

Efectuando as derivadas

$$\mu'(y)y + \mu(y) = 2\mu(y)$$

e para  $y \neq 0$  obtemos

$$\mu'(y) = \frac{1}{y}\mu(y)$$

pelo que, resolvendo a equação

$$\mu(y) = y$$

é um factor integrante da equação.

**(b)** Por construção, a equação

$$y^2 + (4y^3 + 2xy)y' = 0$$

é exacta, pelo que existe  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  verificando

$$\nabla\Phi(x, y) = (y^2, 4y^3 + 2xy)$$

e  $\Phi(x, y) = C$  define implicitamente a solução da equação diferencial. Para calcular  $\Phi$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = y^2 \Leftrightarrow \Phi(x, y) = xy^2 + c(y)$$

e

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 4y^3 + 2xy \Leftrightarrow 2xy + c'(y) = 4y^3 + 2xy \Leftrightarrow c(y) = y^4 + c$$

e finalmente

$$\Phi(x, y) = xy^2 + y^4 = C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial. Dado que  $y(1) = 1$ , tem-se que  $C = 2$ . Por outro lado  $N(1, 1) = 6 \neq 0$ , o Teorema da Função Implícita garante a existência de solução única do PVI, definida por

$$xy^2 + y^4 - 2 = 0 \tag{2}$$

para  $x$  numa vizinhança de  $x_0 = 1$ .

**(c)** Para calcular o intervalo máximo de solução, note-se que, resolvendo a equação (5) em ordem a  $y$

$$y(x) = \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + 8}}{2}}$$

(onde as escolhas dos ramos das raízes foi baseado no facto de a condição inicial  $y_0 = 1 > 0$ ). Dado que

$$-x + \sqrt{x^2 + 8} > 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

tem-se que o intervalo máximo de solução é  $\mathbb{R}$ .

5. a) Determine em que condições uma equação da forma

$$M(t, x) + N(t, x)x' = 0$$

admite um factor integrante que é uma função de  $t$ , isto é, da forma  $\mu(t)$ , para uma certa função real de variável real  $\mu$ , e escreva uma equação diferencial ordinária satisfeita por  $\mu$ .

b) Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{x}{t} - \text{sen}(t) + x' = 0 \quad (3)$$

Mostre que a equação não é exacta. Use o resultado da alínea (a) para determinar a solução da equação (3) que satisfaz a condição inicial  $x(\pi) = 1$ . Indique o intervalo máximo de definição da solução obtida.

**Resolução:**

(a) A equação

$$M(t, x) + N(t, x)x' = 0$$

admite um factor integrante que é função de  $t$ , se conseguirmos encontrar uma função  $\mu(t)$  tal que a equação

$$\mu(t)M(t, x) + \mu(t)N(t, x)x' = 0$$

é uma equação exacta. Para tal

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(t)M(t, x)) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu(t)N(t, x))$$

Efectuando as derivadas

$$\mu(t)\frac{\partial M}{\partial x} = \mu(t)\frac{\partial N}{\partial t} + \mu'(t)N$$

o que é equivalente a

$$\mu'(t) = \left( \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \right) \mu(t) \quad (4)$$

Dado que por construção,  $\mu$  é uma função de  $t$ , para que exista um factor integrante que só dependa de  $t$ , é necessário que a função

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$$

não dependa de  $x$ . Se tal acontecer, a equação (4) é a equação diferencial verificada por  $\mu(t)$ .

(b) Considerando que

$$M(t, x) = \frac{x}{t} - \text{sen}(t) \quad , \quad N(t, x) = 1$$

é óbvio que

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{1}{t} \neq \frac{\partial N}{\partial t} = 0$$

Para o nosso caso

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{1}{t}$$

que obviamente não depende de  $x$ , pelo que, usando (4) o factor integrante verifica

$$\mu'(t) = \frac{1}{t}\mu(t) \Leftrightarrow \mu(t) = t$$

Por construção, a equação

$$x - t \operatorname{sen} t + tx' = 0$$

é exacta, pelo que existe  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  verificando

$$\nabla\Phi(t, x) = (x - t \operatorname{sen} t, t)$$

e  $\Phi(t, x) = C$  define implicitamente a solução da equação diferencial. Para calcular  $\Phi$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = x - t \operatorname{sen} t \Leftrightarrow \Phi(t, x) = xt + t \cos t - \operatorname{sen} t + c(x)$$

e

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = t \Leftrightarrow t + c'(x) = t \Leftrightarrow c(x) = c$$

e finalmente

$$\Phi(t, x) = xt + t \cos t - \operatorname{sen} t = C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial. Dado que  $x(\pi) = 1$ , tem-se que  $C = 0$ . Por outro lado  $N(\pi, 1) = 1 \neq 0$ , o Teorema da Função Implícita garante a existência de solução única do PVI, definida por

$$xt + t \cos t - \operatorname{sen} t = 0 \tag{5}$$

para  $x$  numa vizinhança de  $t_0 = \pi$ . Resolvendo a equação em ordem a  $x$  obtém-se

$$x(t) = \frac{-t \cos t + \operatorname{sen} t}{t}$$

pelo que o intervalo máximo de solução será  $]0, \infty[$ .

6. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^2 \left( \frac{1}{x} + \log x \right) + 2y \log x \frac{dy}{dx} = 0 \\ y(e) = -1 \end{cases}$$

Obtenha explicitamente a solução deste problema e determine o seu intervalo máximo de definição.

**Resolução:** Trata-se de uma equação da forma

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0,$$

com  $M(x, y) = y^2 \left( \frac{1}{x} + \log x \right)$  e  $N(x, y) = 2y \log x$ . Temos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2y}{x} + 2y \log x \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2y}{x},$$

pelo que a equação não é exacta. Multiplicando a equação por um factor integrante  $\mu = \mu(x, y)$ , obtém-se:

$$\mu(x, y)M(x, y) + \mu(x, y)N(x, y)y' = 0.$$

Para que esta equação seja exacta,  $\mu$  deverá verificar

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N),$$

o que é equivalente a

$$y^2 \left( \frac{1}{x} + \log x \right) \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \left( \frac{2y}{x} + 2y \log x \right) = 2y \log x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{2y}{x},$$

ou, ainda:

$$y^2 \left( \frac{1}{x} + \log x \right) \frac{\partial \mu}{\partial y} - 2y \log x \frac{\partial \mu}{\partial x} = -2y \log x \mu \quad (6)$$

Parece pois provável a existência de um factor integrante dependente apenas de  $x$ . De facto, admitindo que  $\mu = \mu(x)$ , então  $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x)$ , pelo que a equação (6) reduz-se a:

$$\mu' = \mu.$$

Podemos então tomar  $\mu(x) = e^x$ . Desta forma, a equação:

$$e^x \left( \frac{1}{x} + \log x \right) y^2 + 2ye^x \log x \frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, e portanto existe  $F(x, y)$  tal que esta mesma equação se pode escrever:

$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = 0.$$

$F$  é então o potencial do campo gradiente  $(e^x (\frac{1}{x} + \log x) y^2, 2ye^x \log x)$ . Assim sendo:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2ye^x \log x.$$

Integrando (em ordem a  $y$ ), obtém-se:

$$F(x, y) = y^2 e^x \log x + h(x). \quad (7)$$

Por outro lado, como

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 e^x \left( \frac{1}{x} + \log x \right) + h'(x) = e^x \left( \frac{1}{x} + \log x \right) y^2,$$

temos  $h'(x) = 0$ , pelo que se pode tomar  $h(x) = 0$  em (7). A solução geral da equação diferencial é então dada implicitamente por:

$$y^2 e^x \log x = C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Da condição inicial  $y(e) = -1$ , resulta que  $C = e^e$ .

Como  $\log x \neq 0$  para  $x$  numa vizinhança de  $e$ , podemos dividir por  $e^x \log x$  e obter (escolhendo o sinal de acordo com a condição inicial):

$$y(x) = -\sqrt{\frac{e^e}{e^x \log x}} = -\sqrt{\frac{e^{e-x}}{\log x}}. \quad (8)$$

Esta expressão define uma função continuamente diferenciável em  $]1, +\infty[$  e é equivalente à forma implícita da solução, nesse intervalo. De acordo com (8), temos que a solução explode quando  $x \rightarrow 1$ , pelo que  $]1, +\infty[$  é mesmo o intervalo máximo de solução.

7. Considere a equação diferencial ordinária

$$(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) + (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (9)$$

- Mostre que (9) tem um factor integrante do tipo  $\mu = \mu(xy)$ .
- Mostre que a solução de (9) com condição inicial  $y(-1) = 1$  é dada implicitamente pela expressão  $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$ .
- Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto  $-1$ , da solução dada implicitamente na alínea anterior.

**Resolução:**

(a) Admitindo que a equação (9) admite um factor integrante do tipo  $\mu = \mu(xy)$ , tem-se que

$$\mu(xy) (4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) + \mu(xy) (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

é uma equação exacta, pelo que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu(xy) (4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu(xy) (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2) \right)$$

ou seja

$$\begin{aligned} \mu'(xy)x (4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) + \mu(xy)(4x^2 + 6xy + 6y^2) &= \\ \mu'(xy)y (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2) + \mu(xy)(6x^2 + 6xy + 4y^2) & \end{aligned}$$

Fazendo  $v = xy$ , obtém-se então

$$\mu'(v) = \frac{1}{v} \mu(v) \Leftrightarrow \mu(v) = v \Leftrightarrow \mu(xy) = xy$$

Por construção a equação

$$xy (4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) + xy (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, pelo que existe  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla \Phi(x, y) = (4x^3y^2 + 3x^2y^3 + 2xy^4, 2x^4y + 3x^3y^2 + 4x^2y^3)$$

e  $\Phi(x, y) = C$  define implicitamente a solução da equação. Para calcular  $\Phi$ ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4x^3y^2 + 3x^2y^3 + 2xy^4 \Rightarrow \Phi(x, y) = x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + c(y)$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2x^4y + 3x^3y^2 + 4x^2y^3 \Rightarrow 2x^4y + 3x^3y^2 + 4x^2y^3 + c'(y) = 2x^4y + 3x^3y^2 + 4x^2y^3$$

o que implica  $c(y) = c$ . Tem-se então

$$\Phi(x, y) = x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial. Finalmente, visto  $y(-1) = 1$  e  $N(-1, 1) = -3 \neq 0$ , o Teorema da Função Implícita garante a existência de solução única de (9) definida por

$$x^4 y^2 + x^3 y^3 + x^2 y^4 - 1 = 0$$

para  $x$  numa vizinhança de  $x_0 = -1$  como se queria mostrar.

(c) O polinómio de Taylor de segunda ordem pedido, será

$$P_2(x) = y(-1) + y'(-1)(x+1) + y''(-1)\frac{(x+1)^2}{2}$$

É dado que  $y(-1) = 1$ , e atendendo a que

$$y'(x) = \frac{4x^2 y + 3xy^2 + 2y^3}{2x^3 + 3x^2 y + 4xy^2}$$

para todo  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$  que não anule  $2x^3 + 3x^2 y + 4xy^2$ , tem-se em particular que

$$y'(-1) = \frac{4x^2 y + 3xy^2 + 2y^3}{2x^3 + 3x^2 y + 4xy^2} \Big|_{(x,y)=(-1,1)} = -1$$

Finalmente, derivando (10) em ordem a  $x$

$$y''(x) = \frac{(8xy + 4x^2 y' + 3y^2 + 6xyy' + 6y^2 y')(2x^3 + 3x^2 y + 4xy^2)}{(2x^3 + 3x^2 y + 4xy^2)^2} - \frac{(4x^2 y + 3xy^2 + 2y^3)(6x^2 + 6xy + 3x^2 y' + 4y^2 + 8xyy')}{(2x^3 + 3x^2 y + 4xy^2)^2}$$

Sabendo que se  $x = -1$ ,  $y = 1$  e  $y' = -1$ , tem-se então

$$y''(-1) = -6$$

e

$$P_2(x) = 1 - (x+1) - 6\frac{(x+1)^2}{2} = -2 - 7x - 3x^2$$